Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
B
32
NAPOLI

XXXIV
B
32

Digitized by Google

Digitized by Google

SEX PRIORA
EVCLIDIS
GEOMETRICA ELEMENTA,

Denuò clarioribus Auctorum demonſtrationibus, vnà cum breuiſſimo proportionum tractatu in gratiam ſtudioſæ iuuentutis eddita,

AC

Illuſtriſsimo Domino

D. IOANNI FRANCISCO POLO

Patritio Veneto conſecrata.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

BONONIÆ, M.DC.LXXXIV.

Typis Ioſephi Longi. *Superiorum permiſſu.*

Digitized by Google

Digitized by Google

Illuſtriſsime Vir.

QVarenti mihi, ac ſedulà mente indaganti cuiuſnam patrocinio celeberrimi Euclidis Geometrica Elementa, denuò typis recuſsa, commendanda eſſent, occurrit, & iuremerito, tui nominis magnitudo, Pole Illuſtriſſime. *Enimuerò ecquiſnam exterus Mecænates huic operi quærendus erat, dum Tu* Adriacæ *illuſtre germen nobilitatis, hac in arena Felſinea penitioris Matheſeos ſtudijs, alijſq; artibus inſudans, oſtendis, vnam eandemque ſedem tuo in ſinu ſortiri, & auitæ nobilitatis maieſtatem, & amorem ſapientiæ; nihilque in hac vita poſse iucundius accidere, quàm patrocinio fouere ſcientias, ac eaſdem in cæteris promouere. Miſſa hic libenter facio innumera, ac perennioribus monumentis digna tuæ gentis decora, cuius Principes inter glorias non ea certè cenſenda eſt, quod in Senatu Veneto numero celeber-*

rimo eorum decem ſit adſcita, quos iure dixeris ſerenſsimi illius Cæli indefeſſos Atlantes, ac motrices Intelligentias. Hæc etenim te ipſo inferiora ſunt, tuiſq; minora encomijs. Tuis laudibus ex te ipſo dignam materiem ſumpſero, qui luſtris quatuor vix adimpletis, ea in Martem, ac Palladem prabes amoris ſpecimina, vt ætas noſtra ſuum Herculem Muſagatem non ſit primæuis temporibus inuiſura. Macto animo, Illuſtriſsime Vir, & ingenua amicorum vota illuſtribus factis proba. Siluero ipſe, dum interim melodicos magis Cicnos non deerunt, qui deplument nominis tui celebritatem æternitati commendaturi, dum ipſe hac humillima obſequij teſſera, ſolum poſteris teſtatum volo, quantum tibi debeam, & quali ferar deſiderio in tui amplisſimi decoris augmentum. Vale igitur optimè, ac in æternum Parentum, & Patriæ decus viue.

Bononiæ Idibus Martij 1684.

Illuſtriſsimæ Dominationis tuæ

Addictiſs. & Obſequentiſs. ſeruus

H. R.

Lectoris admonitio.

Mathematicorum librorum defectus, Amice Lector, ſępeſępius vna cum talium diſciplinarum obſcuritate præcipua exiſtit cauſa cur non mediocris ingenij adoleſcentes, hanc inter cæteras vtiliſſimam ſcientiam negligant. Qua de re, vt hanc difficultatem pro viribus demerem paucis ab hinc menſibus ſex priores Euclidis libros denuo in lucem edere decreui, vt Tyrones de facili ad manus habere poſſent. Quantum poſtea ad obſcuritatem horum librorum; neminem latet ad ipſam tollendam celeberima defatigaſſe ingenia, quorum meo videri nullus magis fuit voti compos, quàm Doctiſſimus Chriſtophorus Clauius, qui hanc matteriam, aliaſque etiam quamplurimas maxima cum claritate, & doctrina pertractauit: quare opere pretium duxi demonſtrationes quamplurimas,

Corrolaria, & Scholia ex ipſo deſumere, multaque iuxta illius mentem demonſtrationibus firmare. In his libris quamuis nil noui pænitus reperiatur, adhuç tamen laborem meum tanquam omninò ſuperfluum ne diiudices; ſiquidem hoc ſolummodo in mente habui, vt magis aliorum vtilitati, quàm propriæ laudi conſulerem, dum ſcribendi occaſio dumtaxat fuerunt illi, qui vix Mathematicas ſcientias ſalutarunt. Fateor æquidem, me ſatis, ſuperque recepiſſe, ſi quorum comoda curaui, meos hoſce labores benigne intueantur. Vale.

Quid

Quid in ſex prioribus Elementis ab Euclide proponatur.

In Primo Elemento.

EVclides in primo libro quamplurima circa rectilineas figuras, triangula ſcilicet, & parallelogramma, demonſtrat. Et primum triangulorum ortus, & proprietates oſtendit, ipſos tùm iuxta angulos, tùm iuxta latera inter ſe comparando. Poſtmodum vero parallelogrammorum proprietates interijciens tranſitum facit ad parallelogramma, quorum ortum declarat, nec non etiam ſymptomata ipſorum demonſtrat. Rurſus triangulorum, ac parallelogrammorum communicationem manifeſtat, & quonam pacto parallelogrammum æquale triangulo conſtituatur. Demum agit de ijs, quæ in rectangulis triangulis à lateribus deſcribuntur, quadratis; videlicet quam habeat proportionem quadratum illud, quod à latere rectum angulum ſubtendente, deſcribitur, ad ea quadrata, quæ à reliquis lateribus rectum angulum comprehendentibus, fiunt.

In Secundo Elemento.

AVctor in ſecundo libro proponit definitiones rectanguli, & gnomonis. Deinde rectangulorum parallelogrammorum, & quadratorum, quæ ex rectarum linearum ſectionibus fiunt, proportiones declarat. Poſtea vero adducit proportionem illam, quam habent quadrata à lateribus obtuſum, vel acutum angulum comprehendentibus facta, ad illa quadrata à latere obtuſum, vel acutum angulum ſubtendente deſcripta. Et denium exponit modum, quo mediante rectilineo dato æquale conſtituatur quadratum.

In Tertio Elemento.

IN hoc Elemento pertractantur ea, quæ in circulis accidunt, necnon etiam de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis. Itemque de angulis, qui ad circulorum centra, vel circumferentias conſiſtunt.

In Quarto Elemento.

EVclides in hoc quarto libro verba facit de figurarum planarum inſcriptionibus, & circumſcriptionibus.

In Quin-

In Quinto Elemento.

IN quinto Euclidis libro analogiæ, ſeu proportiones examinantur in communi quidem, nullatenus deſcendendo ad vllam determinatam quantitatem.

In Sexto Elemento.

TAndem in hoc ſexto Elemento habemus expoſitas figurarum proportiones inter ſeſe; nempe inter figuras ſimiles, & reciprocas, inter rectas lineas proportionales, inter parallelogramma ad rectas lineas applicata, quæ excedant, vel deficiant parallelogrammis ſimilibus. Quomodo linea extrema, ac media ratione ſecetur. Tandemque de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, ſectorumque in circulis æqualibus. Quibus omnibus ſextum Elementum abſoluit.

Non-

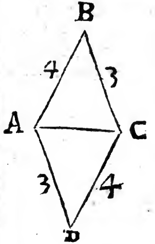
Nonnullæ propoſ. in primo Euclidis Elementorum libro contentæ facilius demonſtrantur.

Ex Viuiano.

Prima pars Prop. V. lib. I. Eucl.

In triangulo Iſoſceli, anguli ſupra baſin, ſunt inter ſe æquales.

Sit triangulum Iſoſceles ABC, in quo latera BA, BC, ſint inter ſe æqualia. Dico angulos ſupra baſin AC, (vt ſunt anguli BAC, BCA,) eſſe inter ſe æquales. Probatur. Mente enim concipiamus, datum triangulum ABC, circa propriam baſin AC, reuolui quouſque in alteram partem cadat verſus ADC, taliter vt latus BA, cadat in AD, & latus BC, in CD; nec non etiam angulus B, in D, & angulus BAC, in DAC; & BCA, in DCA. Quibus ſic ſtantibus fit manifeſtũ, quod duo latera DA, DC, ſunt inter ſe æqualia, cum ponantur æqualia lateribus æqualibus BA, BC; quare omnia quatuor latera BA, BC, DA,



DC,

DC, inter ſe æqualia erunt: Quapropter quicunque concipere poterit latus BA, in triangulo ABC, æquale lateri DC, in triangulo ADC, vti pariter latus BC, in triangulo ABC, æquale lateri DA, in triangulo ADC; & demum angulum ABC, æqualem eſſe angulo ADC, (cum hic fuerit ab illo deſignatus.) Quare (a) reliqui anguli, quibus æqualia latera ſubtenduntur, erunt inter ſe æquales; nempe angulus BAC, in triangulo ABC, æqualis angulo ACD, in triangulo ADC: Sed etiam angulus BCA, in triangulo ABC, eidem angulo ACD, in triangulo ADC, eſt æqualis (cum vnus ab alio deſignetur.) (b) Ergo duo anguli BAC, BCA, cum ſint æquales eidem tertio ACD, ex demonſtratis, erunt æquales inter ſe. Quare in triangulo Iſoſceli anguli &c. Quod erat demonſtrandum.

a 4. pri.

b 1. axio.

Secunda Pars Propoſ. V. lib. 1. Elem. Eucl. poſt 13. Propoſ. demonſtranda.

In triangulo Iſoſceli productis æqualibus lateribus, anguli, qui fiunt infra baſin, ſunt inter ſe æquales.

Sit triangulum Iſoſceles ABC, cuius æqualia latera BA, BC, infra baſin in D, & E, producantur. Dico angulos DAC, ECA, infra baſin AC, conſtitutos eſſe inter ſe æquales. Probatur. Cum enim recta

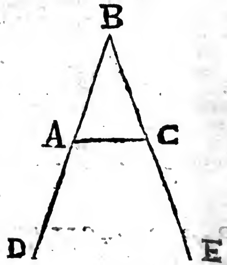
CA,

a 13.*pri.* CA, conſiſtat ſuper rectam BD, (a) facit duos angulos CAB, CAD, duobus rectis æquales; ſed etiam eadem de cauſa recta AC, conſiſtens ſuper rectam BE, efficit duos angulos ACB, ACE, duobus rectis æquales; quare, cum omnes anguli recti (b) ſint inter ſe æquales, erunt duo anguli CAB, CAD, ſimul æquales duobus angulis ACB, ACE, ſimul ſumptis: Vnde quia anguli BAC, BCA, (c) ſunt æquales, ſi auferantur, remanebunt duo anguli ACD, ECA; infra baſim (d) inter ſe æquales. Quod erat demonſtradum.

b 12.*prĩ.*

c 5. *pri.*

d 3. *prĩ.*



SCHOLIVM.

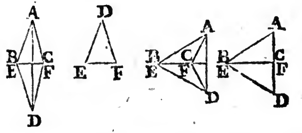
Iuxta ordinem Eucl. ſuccederet 6. & 7. propoſ. demõſtranda; verũ cum 8. propoſ. vt refert Proclus, ſufficienter probari poſſit ſine auxilio 6. & 7. propoſitionis, ideo 6. immediatè poſt 18. propoſ. lib. primi demonſtranda erit, ſeptimam penitus, vt omninò inutilem relinquendo. Vnde placet cùm Proclo poſt 5. octauam demonſtrare.

Pro-

Propoſ. VIII. lib. 1. Euclidis. Ex Proclo.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus vtrunque vtrique æqualia habuerint, habeant vero & baſin baſi æqualem: Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SInt duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, nempe latus AB, æquale ipſi DE, & AC, ipſi DF; & rurſus baſis BC, æqualis ſit baſi EF. Dico angulum A, æqualem eſſe angulo D, illi



ſcilicet duo anguli, qui ab æqualibus lateribus comprehenduntur. Baſis enim EF, intelligatur ſuper poni baſi BC, ita vt triangulum DEF, cadat in oppoſitam partem, non vero ſuper triangulum BAC, quale eſt triangulum EDF. Hoc poſito aut duo latera AC, FD, conſtituunt vnam lineam rectam (quod ſane continget quando duo anguli C, & F, erunt recti, vt patet in tertia figura;) aut non (vt eueniet, quando duo anguli C, & F, ſunt acuti, vel obtuſi, vt in prima, & ſecunda figura cernitur.) Si enim primo loco duo latera AC, FD, conſtituant vnam lineam rectam AD, taliter propoſitum demonſtrabitur. Quoniam in triangulo AED, duo latera AB, ED, ponun-

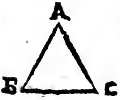
tur

a 5. pri. tur æqualia per hypotheſin, (a) erunt anguli A, & D, ſuper baſin æquales. Quod erat oſtendendum.

Si vero, vt in prima figura, nulla latera componant lineam rectam; ex A, ad D, recta ducatur AD, quæ poteſt cadere intra, vel extra triangula. Cadit enim intra quando anguli C, & F, ſunt acuti, & extra quando ſunt obtuſi, vt in figuris apparet. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, ED, ſunt æqualia,
b 5. pri. (b) erunt duo anguli EAD, EDA, ad baſin æquales. Eademq; ratione, quia duo latera AF, FD, in triangulo ADF, ſunt inter ſe æqualia, erunt anguli ADF, DAF, æquales. Vnde ſi hi æquales illi æqualibus ad-
c 2. pron. dantur, (c) reſultabunt duo anguli EDF, EAF, æquales. Quod erat oſtendendum. Si vero, vt in ſecunda figura, recta DA, cadat extra triangulum DEA, ab æqualibus angulis EDA, EAD, auferendo æquales angulos FDA, FAD, remanebunt duo anguli EDF, EAF, æquales. Quod fuit propoſitum. Quare ſi duo triangula duo latera duobus lateribus &c. Quod erat demonſtrandum.

Propoſ. VI. lib. I. Elem. Euclid. poſt 18. demonſtranda.

Si trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint; etiam ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.



IN triangulo ABC, ſint duo anguli ABC, ACB, ſuper latus BC, inter ſe æquales. Dico etiam duo latera æqualibus angulis oppoſita, nempe AB, AC, eſſe æqualia. Probatur. Si enim non ſunt æqualia latera AB, AC, erit alterum

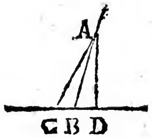
terum maius. Sit ergo AB, maius quàm AC, (a) ſequitur iam quod angulus C, maiori lateri oppoſitus ſit maior angulo B, qui minori lateri opponitur: quod eſt contra ſuppoſitum; anguli enim B,& C, ſupponuntur æquales. Si ergo trianguli duo anguli &c. Quod erat demonſtrandum. a 18. *pri.*

V T autem citationes in ipſiſmet demonſtrationibus poſitæ facilius intelligantur eſt aduertendum, iſtas taliter tum in margine, tùm in ipſiſmet demonſtrationibus fuiſſe notatas.

1. *def.*	Prima definitio: ſicque de alijs numeris, vt 4. def. 5. def. &c.
1. *pet.*	Prima petitio, vel primum poſtulatum.
1. *pron.*	Primum pronunciatum, ſeu Axioma; ſicq; de reliquis numeris.
1. *pri.*	Prima propoſitio primi libri.
23. *ſex.*	Vigeſima tertia propoſ. lib. ſexti.
20. *qui.*	Vigeſima propoſ. libri quinti &c.

Litteræ vero alphabeticæ in margine, & demonſtrationibus poſitæ denotant ad quem locum quælibet citatio ſit referenda, ne curſus demonſtrationum interrupatur.

Præſens Figura inſeruit coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. pag. 32. cum ibi fuerit prætermiſſa.



Digitized by Google

PRIMVM EVCLIDIS ELEMENTVM.

DEFINITIONES.

I.

PVnctum eſt illud, cuius nulla pars eſt.

II.

Linea verò, eſt longitudo latitudinis expers.

III.

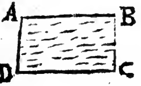
Lineæ autem termini, ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.

V.

Superficies eſt illa, quæ longitudinem, ac latitudinem tantum habet.



Vt pateat exempligratia in quantitate A B C D, à lineis AB, BC, CD, DA, comprehenſa, quæ conſiderata ſecundum longitudinem A B, & ſecundum latitudinem A D, (remota omni profunditate) ſuperficies appellatur.

Digitized by Google

VI.

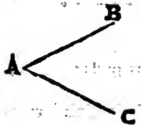
Superficiei autem extrema, ſunt lineæ.

VII.

Plana ſuperficies eſt illa, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

VIII.

Planus verò angulus eſt, duarum linearum in plano ſeſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.



Exempli gratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideò efficiunt angulum A, planum in eadem exiſtentem ſuperficie; in qua duæ illæ lineæ conſtituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earum verſus concurſum protenſa non coincidit cum altera, ſed vel eam ſecat, vel ſtatim poſt punctum concurſus ab ea recedit. Quæ ſecunda conditio ponitur propter angulum contactus, in quo lineæ non ſe ſecant, at ſolumodo ſe tangunt, & poſtmodum recedunt.

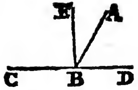
IX.

Cum autem lineæ, quæ angulum continent, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

X.

Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam eos, qui deinceps ſunt angulos, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum: & quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui inſiſtit.

Pro



Pro clariori intelligentia huius definitionis dico, quod ſi recta EB, rectæ CD, inſiſtens efficiat duos angulos propè punctum B, nempe EBC, & EBD (qui ſanè a Mathematicis vocantur anguli deinceps) inter ſe æquales, vocabitur vterque angulus rectus, & recta EB, inſiſtens perpendicularis erit rectæ CD, cui inſiſtit.

XI.

Obtuſus angulus, recto maior eſt.

In ſuperiori enim figura ducta recta AB, angulus ABC, eſt obtuſus, quia maior eſt recto EBC.

XII.

Acutus vero angulus eſt, qui minor eſt recto.

Vt v.g. angulus ABD, qui eſt minor angulo recto EBD.

XIII.

Terminus eſt, quod alicuius extremum eſt.

Iuxta hanc definitionem tres ſolummodo ſunt termini ideſt Punctum, Linea, & Superficies. Punctum enim terminus eſt lineæ. Linea eſt terminus ſuperficiei, & ſuperficies terminus eſt corporis.

XIV.

Figura eſt illa, quæ ſub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

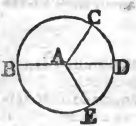
Quantum ad hanc definitionem eſt aduertendum, quod omnis quantitas terminos poſſidens, figura dici

non poteſt, ſiquidem linea finita licet habeat terminos, nempe extrema puncta, adhuc tamen figura non appellatur, quia linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, ſed potius punctis terminari dicitur: Vnde colligitur terminos debere quantitatem, quæ figura vocatur, ambire, & non tantum terminare.

XV.

Circulus, eſt figura plana ſub vna linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

In hac definitione Euclides definit circulum, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circumſcribitur, & ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram exiſtit, ſunt æquales, circulum vocari. Vt ſi ſuperficies aliqua concludatur vnica linea BCDE, & inſuper habuerit hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intra dictam lineam ſuſcepto, nempe A, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum BCDE, ſint æquales inter ſe, huiuſmodi figura plana circulus appellabitur.



XVI.

Hoc verò punctum, centrum circuli appellatur.

In hac definitione Euclides docet, punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circumferen-

rentiam ductæ, ſunt æquales, appellari centrum circuli; quale eſt punctum A, poſitum in præcedenti figura: quo ſtante lineæ rectæ AC, AD, & AE, ſunt inter ſe æquales.

XVII.

Diameter autem circuli, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam ſecat.

Huius definitionis exemplum habemus in ſuperiori figura, in qua linea recta BD, per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, nec non etiam diuidens circulum in duas partes æquales, diameter vocatur.

XVIII.

Semicirculus verò eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub illa linea, quæ de circuli peripheria a diametro aufertur.

Exempli gratia in ſuperiori circulo figura BCD, contenta ſub diametro BD, & peripheria BCD, dicitur ſemicirculus, quia vt ſupra viſum eſt, huiuſmodi figura eſt dimidiata pars circuli. Si vero aliqua recta in circulo non per centrum ducatur conſtituit duas figuras, quæ circuli ſegmenta vocantur, quorum vnum ſemicirculo maius eſt, alterum vero minus.

XIX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

XX.

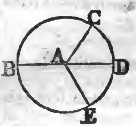
Trilateræ quidem, quæ ſub tribus

non poteſt, ſiquidem linea finita licet habeat terminos, nempe extrema puncta, adhuc tamen figura non appellatur, quia linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, ſed potius punctis terminari dicitur: Vnde colligitur terminos debere quantitatem, quæ figura vocatur, ambire, & non tantum terminare.

XV.

Circulus, eſt figura plana ſub vna linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

In hac definitione Euclides definit circulum, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circumſcribitur, & ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram exiſtit, ſunt æquales, circulum vocari. Vt ſi ſuperficies aliqua concludatur vnica linea BCDE, & inſuper habuerit hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intra dictam lineam ſuſcepto, nempe A, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum BCDE, ſint æquales inter ſe, huiuſmodi figura plana circulus appellabitur.



XVI.

Hoc vero punctum, centrum circuli appellatur.

In hac definitione Euclides docet, punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circumferen-

rentiam ductæ, ſunt æquales, appellari centrum circuli; quale eſt punctum A, poſitum in præcedenti figura: quo ſtante lineæ rectæ AC, AD, & AE, ſunt inter ſe æquales.

XVII.

Diameter autem circuli, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam ſecat.

Huius definitionis exemplum habemus in ſuperiori figura, in qua linea recta BD, per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, nec non etiam diuidens circulum in duas partes æquales, diameter vocatur.

XVIII.

Semicirculus verò eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub illa linea, quæ de circuli peripheria a diametro aufertur.

Exempli gratia in ſuperiori circulo figura BCD, contenta ſub diametro BD, & peripheria BCD, dicitur ſemicirculus, quia vt ſupra viſum eſt, huiuſmodi figura eſt dimidiata pars circuli. Si vero aliqua recta in circulo non per centrum ducatur conſtituit duas figuras, quæ circuli ſegmenta vocantur, quorum vnum ſemicirculo maius eſt, alterum vero minus.

XIX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

XX.

Trilateræ quidem, quæ ſub tribus

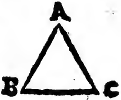
XXI.

Quadrilateræ vero, quæ ſub quatuor.

XXII.

Multilateræ autem, quæ ſub pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

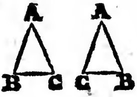
XXIII.



Trilaterarũ autem figurarum, æquilaterum triangulum eſt illud, quod tria latera habet æqualia.

Vt in triangulo ABC.

XXIV.



Triangulum Iſoſceles eſt, quod duo tantum habet latera æqualia.

Vt in triangulo ABC.

XXV.



Triangulum ſcalenum eſt, quod tria inæqualia habet latera.

Vt in triangulo GHI.

XXVI.

Trilaterarũ figurarum rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet, vt eſt angulus H, in ſupetiori figura.

Digitized by Google

XXVII.

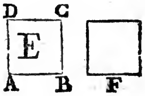
Amblygonium autem, quod obtuſum angulum habet.

XXVIII.

Oxygonium vero, quod tres habet acutos angulos.

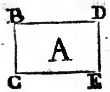
Vt in triangulo æquilatero clarum eſt.

XXIX.



Quadrilaterarum autem figurarum, Quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum, & rectangulum eſt.

XXX.



Altera vero parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.

XXXI.



Rhombus autem figura eſt, quæ æquilatera, ſed rectangula non eſt.

XXXII.



Rhomboides vero figura eſt, quæ oppoſita latera, & angulos habet inter ſe æquales, cum nec æquilatera, nec æquiangula ſit.

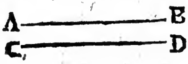
XXXIII.



Præter has autem figuras, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

XXXIV.

Parallelæ rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, ſi ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuo incidunt.



XXXV.

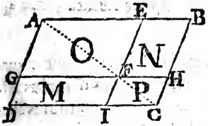
Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cuius bina oppoſita latera ſunt parallela, ſeu æquidiſtantia. Vt patet in romboide ſupra poſito.

XXXVI.

Cum vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ ſecantes diametrum in vno, eodemque puncto, ita vt parallelogrãmum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incidit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.

Hoc totum patet in parallelogrammo ABCD, in quo diameter AC, & linea GH ſecans diametrum in pun-

punćto F exiſtenſq; parallela lateribus AB, & DC. Item linea IE ſecans diametrum in eodem punćto F, parallelaq; exiſtens lateribus AD, & BC. Quibus ita ſtantibus perſpicuũ eſt parallelogrãmũ totum ABCD, diuiſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorũm duo, nempe GFID, EBHF, per quæ diameter non tranſit, vocantur complementa, ſiue ſupplementa reliquorum duorum AEFG, FHCI exiſtentium circa diametrum.



PETITIONES, SIVE Poſtulata.

I.

Poſtuletur, vt a quouis punćto in quoduis pũćtum, rećtam lineam ducere concedatur.

II.

Et rećtam lineam terminatam in continuum rećta producere.

III.

Item quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.

IV.

Item quacumque magnitudine data, ſumi poſſe aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

AXIO-

AXIOMATA, SIVE communes notiones, quæ etiam Pronunciata, vel Dignitates dici ſolent.

I.

QVæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia. Et quod vno æqualium maius eſt, aut minus, maius quoque eſt, aut minus altero æqualium. Et ſi vnum æqualium maius eſt, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius eſt, aut minus

II.

Et ſi æqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.

III.

Et ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquantur, ſunt æqualia.

IV.

Et ſi inæqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt inæqualia. Et ſi inæqualibus inæqualia adiecta ſint, maiori maius, & minori minus, tota ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia. Et ſi ab inæqualibus inæqualia ablata ſint à maiori minus; & à minori maius, reliqua ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

VI.

VI.

Quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia; Et quod vnius æqualium duplum eſt, & alterius æqualium duplum erit.

VII.

Et quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia. Et è contra, quæ æqualia ſunt, eiuſdem ſunt dimidia.

VIII.

Et quæ ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

Senſus huius Axiomatis eſt quod ſi dentur duæ quantitates, quarum vna alteri ſuperpoſita, neutra alteram excedat, ſed ambæ inter ſe congruant, illæ quantitates æquales erunt.

IX.

Et totum ſua parte maius eſt.

X.

Duæ lineæ rectæ non habent vnum, & idem ſegmentum commune.

Iſtud Axioma, ſi benè intelligatur natura rectæ lineæ, non eſt difficile. Proclus vero vt tollat omnem dubitationem, ipſum demonſtrat, vt videre eſt apud P. Clauium in ſuis commentarijs.

XI.

Duæ rectæ in vno puncto concurrentes, ſi producantur ambæ, neceſſario ſe mutuo in eo puncto interſecabunt.

Digitized by Google

XII.

Item omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

Præſens Axioma apertiſſimum eſt ex decima definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, vel minui nequit, ſed prorſus eſt immutabili, cum angulus rectus efficiatur a perpendiculari, quæ alteri rectæ inſiſtat. Quæ perpendicularis eſt omnino immobilis, nec ad vnam, nec ad alteram partem deflectere poteſt, ſecus non erit amplius perpendicularis.

XIII.

Et ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos, & ad eaſdem partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

Exempligratia ſi in duas rectas lineas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte vid. BEF, DFE minores duobus rectis, vult Euclides illas tandem in vnum punctum concurrere, verſus eam partem in qua ſunt anguli minores duobus rectis. Quia verò (vt notat Clauius) huiuſmodi Axioma maximam dubietatem ſecum trahit, ipſius probationem ommittere non debemus, ar ſolummodo ipſam ad Prop. 29. remittimus, cum ibi ſolum incipiat apparere vſus huius Axiomatis: & hoc ne vllus dubitationi locus relinquatur.



XIV.

XIV.

Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

Huiuſmodi principium nullam poteſt habere difficultatem; nam ſi duæ lineæ rectæ verſus vnam partem coeant in punctum, angulumque efferment, neceſſariò ex altera parte ſemper magis, ac magis diſiungentur, vt perſpicuum eſt. Quamobrē, vt ſpatiū aliquod rectilineū ex omni parte claudatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda eſt. Si quis vero cuperet demonſtrationem huius Axiomatis Clauium conſulat.

XV.

Si æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis.

XVI.

Si inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

XVII.

Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis.

XVIII.

Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis.

XIX.

Omne totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

Digitized by Google

XX.

Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

Vt verbi gratia quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10. Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam eſt reliqui huius 7. Aduertant tamen quod hoc Axioma in vniuerſum demonſtrabitur Prop. 5. lib. 5.

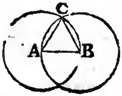
XXI.

Si fuerint tres quantitates, quarum prima ſuperet ſecundam, & ſecunda ſuperet tertiam, etiam prima tertiam ſuperabit.

PROPOS. 1. PROBL. 1.

Super data recta linea terminata, triangulum æquilaterum conſtituere.

Ante demonſtrationem huius propoſitionis eſt aduertendum in omni problemate duo potiſſimum eſſe conſideranda, nempe conſtructio illius, quod proponitur, & demonſtratio, qua oſtenditur, conſtructionem rectè eſſe inſtitutam. Quæ duo etiam reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonſtretur id, quod proponitur, conſtruendum eſt aliquid; vt ex ſequentibus fiet manifeſtum, cum pauca admodum ſint theoremata, quæ nullam requirant conſtructionem.



Sit

Sit igitur propoſita recta linea terminata AB, ſuper quam conſtituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ AB, (a) deſcribatur circulus CB: Item centro B, & interuallo eiuſdem rectæ BA, alius circulus deſcribatur CA, ſecans priorem in puncto C. Ex quo (b) ducantur duæ rectæ lineæ CA, CB, ad puncta A, & B; Eritque ſuper rectam AB, conſtitutum triangulum ABC, hoc eſt, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico hoc triangulum ita constructum eſſe æquilaterum. Probatur. Quoniam rectæ AB, AC, ducuntur ex centro A, ad circumpherentiam circuli CB, (d) erit recta AC, rectæ AB, æqualis: Rurſus quia rectæ BC, BA, ducuntur ex centro B, ad circumpherentiam circuli CA, erit recta BC, rectæ BA æqualis. Tàm igitur AC, quàm BC, æqualis eſt rectæ AB. (c) Quare AC, & BC inter ſe æquales erunt; atque id circo triangulum ABC, erit æquilaterum. Supra data ergo recta linea terminata &c. Quod erat faciendum.

a 3. pet.
b 1. pet.
d 15. def.
c 1. axi.

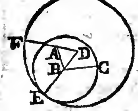
PROPOS. 2. PROBL. 2.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit punctum datum A, & data recta linea BC, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ BC, nempe B, centro (a) deſcribatur circulus CE, interuallo rectæ BC. Hoc facto ex puncto A. ad centrum B (b) recta ducatur AB; (niſi punctum A, fuerint intra rectam BC, vel in aliqua extremitate lineæ BC Tunc enim pro linea ducta ſumetur portio lineæ BC.) Super recta vero AB (c) conſtituatur triangulum æquilaterum ABD, ſurſum, aut deorſum verſus, vt libuerit; cuius duo latera modo conſtituta DA, DB, verſus rectam

a 3. pet.
b 1. pet.
c 1. primi.

d 2. *pet.* ctam AB (d) extendantur; DB, quidem oppoſitum puncto dato A, vſque ad circumferentiam in E; DA, vero oppoſitum centro B, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo lineæ DE per centrum B tranſeuntis (e) alter circulus deſcribatur FE, ſecans rectam DF, in F.



e 3. *pet.*

Dico rectam AF, poſitam ad punctum datum A, æqualem eſſe datæ rectæ BC. Probatur. Quoniam DE, DF, ductæ ſunt ex centro D, ad circumferentiam FE, (f) ipſæ inter ſe æquales erunt: Ablatis igitur DA, DB, æqualibus, cum ſint latera trianguli æquilateri ADB, (g) remanebit AF, æqualis rectæ BE. Sed eidem BE, (h) æqualis eſt recta BC, (cum ambæ cadant ex centro B, ad circumferentiam EC.) Igitur rectæ AF, BC, quandoquidem vtraque æqualis eſt oſtenſa rectæ BE, inter ſe (k) ęquales erunt. Ad datum igitur punctum &c. Quod erat faciendum.

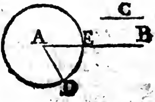
f 15. *def.* g 3. *prō.* h 15. *def.* k 1. *prō.*

PROPOS. 3. PROBL. 3.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, de maiore lineam minori æqualem detrahere.

SInt duæ rectæ lineæ inæquales C, minor, & AB maior, oporteatq; ex maiore AB detrahere lineam æqualem minori C. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris AB, nempe ad punctum A, (a) ponatur aliqua linea, quæ ſit AD, æqualis minori C. Deinde centro A, interuallo AD (b) circulus deſcribatur ſecans AB, in E; Dico AE detractam eſſe æqualem ipſi C. Probatur. Quoniam AE, (c) æqualis eſt ipſi AD, & eidem

a 2. *pri.* b 3. *pet.* c 15. *def.*

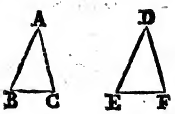


eidem AD per conſtructionem æqualis eſt linea C; (d) erunt AD, & C, inter ſe æquales. Duabus igitur datis &c. Quod erat faciendum. d 1.pun.

PROPOS. 4. THEOR. 1.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero, & angulum angulo æqualem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſim baſi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulus æquales erunt, vterque vtrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Sint duo triãgula ABC, DEF, & vnius vtrumq; latus AB, AC, æquale ſit alterius vtrique lateri DE, DF, hoc eſt AB ipſi DE, & AC, ipſi DF; angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico baſim BC, æqualem quoque eſſe baſi EF; & totum triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, ideſt, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF inter ſe; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter ſe quoque eſſe æquales. Probatur: Quoniam enim recta AB, rectæ DE, ponitur æqualis, fit, vt ſi altera alteri ſuperponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, (a) ipſæ ſibi mutuo congruant, punctumque B, in puncto E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, a 8.pro.



terit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem ſegmentum commune, (b) quod eſt impoſſibile. Quod ſi quis dicat poſito puncto A in D, cadere quidem punctum B, in E, ſed rectam AB, cadere vel ad deſtram, vel ad ſiniſtram, claudent duæ rectæ lineæ ſuperficiem, (c) quod fieri non poteſt. Quare recta AB, rectæ D E, congruet, vt dictum eſt. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, (d) congruet quoque alter alteri, hoc eſt recta AC, rectæ DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF; Baſis igitur BC, baſi EF, congruet quoque: alias ſi recta BC, caderet ſupra, vel infra EF, cum punctum B, cadat in puncto E, & punctum C, cadat in puncto F, duæ rectæ clauderent ſpatium (e) quod eſt abſendum. Quo circa baſis BC, cum baſi EF congruit, ac proinde æqualis (f) erit. Et triangulum ABC, triangulo DEF; & angulus B, angulo E, & angulus C, angulo F, ob eandem cauſam exiſtet æqualis. Quam ſi duo triangula &c. Quod erat demonſtrandum.

b 10. prõ. c 14. prõ. d 8. prõ. e 14. prõ. f 8. prõ.

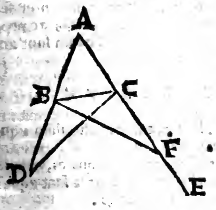
PROP. 5. THEOR. 2.

Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli, inter ſe æquales erunt.

SIt triangulum iſoſceles ABC, in quo latera AB, AC, inter ſe ſint æqualia. Dico angulos ABC, ACB, ſupra baſim BC, æquales inter ſe eſſe: Item ſi latera æqualia AB, AC, producantur quantum libuerit vſque ad puncta D; & E, dico angulos quoque D BC, ECB, infra eandem baſim BC, eſſe æquales. Probatur. Ex linea enim AE, infinite producta (a) abſcin-

a 3. primi.

ſcindatur AF, æqualis ipſi AD, (b) & ducantur rectæ BF, CD. Conſiderentur deinde duo triangula ABF, ACD. Quia ergo duo latera AB, AF, trianguli ABF, æqualia ſunt duobus lateribus AC, AD, trianguli ACD, vtrumque vtrique, nempe AB, ipſi AC, ex hypotheſi, & AF, ipſi AD, ex conſtructione; angulusque A, contentus lateribus AB, AF; æqualis eſt angulo A, contento lateribus AC, AD; immo angulus A, communis eſt vtrique triangulo: (c) erit baſis BF, æqualis baſi CD; & angulus F, angulo D; & angulus ABF, angulo ACD, cum & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rurſus conſiderentur duo triangula BDC, CFB. Quoniam vero rectæ AD, AF, æquales ſunt per conſtructionem, ſit vt ſi auferantur ex ipſis æquales AB, AC, (d) & reliquæ BD, & CF, ſint æquales. Quare duo latera BD, DC, trianguli BDC, æqualia ſunt duobus lateribus CF, FB, trianguli CFB, vtrunque vtrique, videlicet BD, ipſi CF, & DC, ipſi FB, vt probatum eſt: Sunt autem, & anguli D, & F, dictis lateribus æqualibus contenti æquales, vt oſtenſum etiam fuit; igitur erit angulus (e) DBC, angulo FCB, æqualis; & angulus BCD, angulo CBF. Tàm enim priores, quàm poſteriores duo æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntque ſupra communem baſim BC. Quod ſi ex totis angulis æqualibus ABF, ACD, (quos æquales eſſe iam demonſtrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales CBF, BCD, (quos itidem in poſterioribus triangulis probauimus eſſe æquales) (f) remanebunt angu-



b 1. *pet.*

c 4. *pri. mi.*

d 3. *pro.*

e 4. *pri. mi.*

f 3 *pron.*

anguli ABC, ACB, ſupra baſim BC, æquales: Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos DBC, FCB, qui quidem ſunt infra eandem baſim BC, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & anguli infra eandem inter ſe ſunt æquales; ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

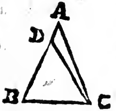
Ex hac propoſ. 5. liquet, omne triangulum æquilaterum eſſe quoque æquiangulum: hoc eſt, tres angulos trianguli æquilateri eſſe inter ſe æquales, nam ſemper duo latera quomodocumque ſumpta ſunt æqualia, ſicque anguli ad baſim ſunt æquales.

PROPOS. 6. THEOR. 3.

Si trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.

IN triangulo ABC, ſint duo anguli ABC, ACB, ſuper latus BC, æquales. Dico duo làtera illis oppoſita AB, AC, eſſe quoq; æqualia. Probatur. Si enim non credantur æqualia ſtante ſuppoſitione, erit alterum maius altero: ſit igitur AB, maius quam AC, ſi fieri poteſt: Et ex AB (a) abſcindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, (quæ minor dicitur eſſe quam AB,) ducatur quæ recta CD. Conſiderentur modo duo triangula ACB, DBC, in quibus cum duo latera AC,

a 3. primi.



CB, trianguli ACB æqualia ſint duobus lateribus DB, BC,

BC, trianguli DBC, vtrumque vtrique, nempe AC, ipſi DB, (abſcidimus enim ex AB, ipſi AC, æqualem DB) & CB, ipſi BC, cum ſit vnum, & idem; ſint autem & anguli ACB, DBC, dictis lateribus contenti æquales per hypotheſim: (b) erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum, & pars, quod fieri nequit. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſuper latus BC, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe concedamus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli duo anguli &c. Quod demonſtrandum erat. b 4. primi.

COROLLARIVM.

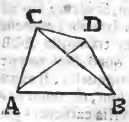
Sequitur ex hac propoſitione, omne triangulum æquiangulum, ideſt, cuius omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt Corollarij 5. Propoſ. vt patet; & ſuadetur, quia in triangulo æquiangulo duo anguli quomodocunque ſumpti inter ſe ſunt æquales, vnde & latera ſubtenſa æqualia erunt.

PROPOS. 7. THEOR. 4.

Super eadem recta linea ad vnum punctum ductis duabus rectis lineis, duæ aliæ rectæ lineæ vtraque vtrique iam ductis æquales, non conſtituentur ad aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis habentes.

SVper recta AB, ad quoduis punctum nempe C, ducantur duæ rectæ AC, BC. Dico ſuper eandem

rectam AB, verſus eandem partem C, non poſſe ad aliud punctum, vt ad D, conſtitui duas alias rectas, lineas, quæ ſint æquales lineis AC, BC, vtraque vtrique, nempe AC, ipſi AD, quæ eundem habent terminum A, & BC, ipſi BD, quæ eundem etiam poſſident terminum B. Prob. Sint enim, ſi fieri poteſt, rectæ AC, AD, inter ſe, & rectæ BC, BD, inter ſe etiam æquales, quo ſtante à puncto C, ad punctum D, ducta recta CD, triangulum CAD, (a) erit iſoſceles, ac proinde anguli ACD, ADC, ſupra baſim (b) inter ſe æquales erunt: Ac proinde (c) cum angulus ADC, minor ſit angulo BDC, pars toto, erit & angulus ACD, minor eodem angulo BDC. Quare multo minor erit Angulus BCD, pars anguli ACD, angulo eodem BDC. Rurſus, cum in triangulo BDC, latera BC, BD, ponantur æqualia, (d) erunt anguli BCD, BDC, ſuper baſim CD, æquales; Eſt autem iam oſtenſum, angulum BCD, multo eſſe minorem angulo BDC. Idem igitur angulus BCD, & minor eſt angulo BDC, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe AC, AD, ſicuti nec etiam BD, & BC. Quare ſuper eadem recta linea duabus, &c. Quod erat demonſtrandum.



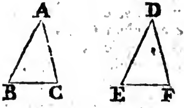
a 24. *def.* b 5. *pri.* c 9. *prõ.* d 5. *pri.*

PROPOS. 8. THEOR. 5.

Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & baſim baſi æqualem; Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

Sint

Sint duo latera AB, AC, trianguli ABC, duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqualia vtrumque vtrique, nempe AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, ſit autem & baſis BC, baſi EF, æqualis. Dico angulum A, æqualem eſſe angulo D, quorum vterque dictis lateribus æqualibus continetur. Probatur. Si enim mente intelligatur baſis BC, ſuperponi baſi EF, (a) neutra excedet alteram, ſed punctum B, congruet cum puncto E, & punctum C, cum puncto F, quandoquidem iſtæ baſes ponuntur inter ſe æquales. Deinde ſi triangulum ABC, cogitetur cadere ſuper triangulum DEF, vel punctum A, cadet in puncto D, vel alio. Si punctum A, in ipſum punctum D, cadat congruent ſibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia. Ac propterea (b) angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod ſi punctum A, alio dicatur cadere, (quomodocumque poſtea id contingat, hoc eſt ſiue in latus ED, ſiue intra triangulum EDF, ſiue extra, vt conſideranti patebit;) erit perpetuo BA, æqualis ipſi ED, & CA, erit æqualis ipſi FD, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus alterius. Hoc autem ſuccedere non poteſt, cum in antecedenti fuerit demonſtratum verſus eandem partem ad diuerſa puncta non poſſe duci duas lineas (c) iam ductis æquales, eundem cum primis initium habentes. Non igitur punctum A, cadet alio quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare ſi duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus æqualia, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 8. prõ.

b 8. prĩ.

c 7. pri.

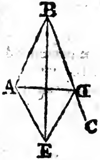
COROLLARIVM.

Porrò ex antecedente huius octauæ propoſitionis non ſolum colligi poteſt, angulos ab æqualibus lateribus contentos æquales eſſe; verum etiam reliquos angulos, qui ad baſes conſtituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totum triangulum toti triangulo, vt conſtat ex eadem ſuperpoſitione vnius trianguli ſuper alterum. Nam ſibi mutuo congruent, & dicti anguli, & tota triangula, vt perſpicuum eſt. Quod etiam ex quarta propoſitione colligi poterit.

PROPOS. 9. PROBL. 4.

Datum angulum rectilineum bifariam ſecare.

SIt diuidendus angulus rectilineus ABC, bifariam, hoc eſt in duos angulos æquales. A recta BC,
a 3. pri. (a) maiori abſcindatur BD, æqualis ipſi BA, ducaturque
b 1. pri. que recta AD. Deinde ſuper AD, (b) conſtituatur triangulum æquilaterum AED, & ducatur recta BE, diuidens angulum rectilineum ABC, in angulos ABE, EBC. Dico hos angulos inter ſe eſſe æquales. Probatur. Cum enim latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia ſint lateribus DB, BE, trianguli DBE, vtrumque vtrique (nam DB, per conſtructionem ipſi AB, factum fuit æquale) & BE, eſt commune; & baſis AE, ſit æqualis baſi F D; ex eo quod ſint latera trianguli æquilateri; ſequitur, quod duo triangula ABE, BDE, habeant conditiones octauæ Propoſitionis, vnde erit angulus

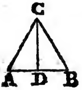


gulus ABE, angulo DBE, æqualis; quapropter angulus ABC, erit bifaria diuiſus; quod erat faciendum.

PROPOS. 10. PROBL. 5.

Datam rectam lineam finitam bifariam ſecare.

SIt recta finita AB, diuidenda bifariam, ideſt in duas partes æquales, (a) Deſcribatur ſuper AB, a 1. *pri.*
triangulum æquilaterum ABC, cuius angulus C, per rectam CD, (b) diuidatur bifariam, b 9. *pri.*
rectaque CD, rectam AB, ſecet in D. Dico rectam AB, bifariam eſſe diuiſam in D. Probatur. Quoniam duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia ſunt duobus lateribus BC, CD, trianguli BCD, vtrumque vtrique, nempe AC, ipſi BC, cum ſint ambo latera trianguli æquilateri, & CD, eſt commune; Eſt autem & angulus ACD, angulo BCD, æqualis per conſtructionem: (c) erit baſis AD, baſi DB, æqualis. c 4. *pri.*
Data igitur recta AB, fuit bifariam ſecta in D. Quod erat faciendum.

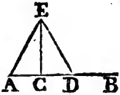


PROPOS. 11. PROBL. 6.

Data recta linea, a puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

SIt data recta linea AB, & in ipſa ſit datum punctum C, a quo iubemur erigere ſuper AB, lineam ad angulos rectos, ſeu perpendicularem. A puncto C, ſumatur (a) recta CD, æqualis ipſi CA. Deinde a 3. *pri.*
ſuper

b 1. pri. ſuper AD; (b) conſtituatur triangulum æquilaterum



AED, atque ex puncto E, ad punctum C, ducatur linea EC, quam dico eſſe perpendicularem ad AB. Probatur. Quoniam latera AC, CE, trianguli ACE, æqualia ſunt lateribus DC, CE, trianguli DCE, vtrumque vtrique, nempe AC, ipſi CD, per conſtructionem; & CE, commune; Eſt vero, & baſis AE, baſi ED, æqualis, cum ſint latera trianguli

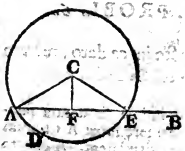
c 8. pri. æquilateri: (c) Erunt anguli ad C, dictis lateribus

d 10. pri. comprehenſi æquales: (d) quare dicetur vterque rectus; atque adeo EC, recta ad AB, perpendicularis erit. Data igitur recta linea a puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

PROPOS. 12. PROBL. 7.

Super datam rectam lineam etiam infinitam, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam ducere.

SIt recta AB, etiam interminatæ quantitatis, & extra ipſam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem ducere ad rectam AB. Centro C, interuallo vero quolibet circulus deſcribatur ſecans AB, in A, & E, (quoniam interuallum aſſūptum tantùm eſſe debet, vt tranſcendat rectam AB; alias eam non ſecaret)



a 10. pri. (a) diuiſa autem recta AE, bifariam in F, ducatur recta CF, quam dico perpendicularem eſſe

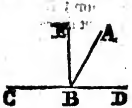
ad

ad AB. Probatur. Si enim ducantur CA, CE, erunt duo latera AF, & FC, trianguli AFC, æqualia duobus lateribus EF, FC, trianguli EFC; vtrumque vtrique, per conſtructionem; eſt autem & baſis CA, baſi CE æqualis, cum ſint ex centro C, ad circumferentiam ADE. Quare (b) erit angulus AFC, angulo EFC, æqualis, & propterea vterque rectus. Ducta eſt igitur CF, perpendicularis ad AB. Quod erat faciendum. b 8. *pri.*

PROPOS. 13. THEOR. 6.

Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

Sit recta linea AB, conſiſtens ſuper rectam CD, quæ faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur AB, fuerit perpendicularis ad CD, (a) duo anguli erunt recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet quidem vnum angulum obtuſum, alterum vero acutum. Dico igitur ipſos duobus eſſe rectis æquales. Probatur. (b) A puncto B, ducatur BE, perpendicularis ad CD, & ſint duo anguli EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD, (c) æqualis eſt duobus angulis DBA, ABE; (f) erunt appoſito communi angulo recto EBC, duo recti EBD, EBC, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Rurſus quia (g) angulus ABC, duobus angulis ABE, EBC, æqualis eſt; (h) erunt appoſito communi angulo ABD, duo anguli ABC, ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Sed eiſdem his tribus oſtendimus, æquales etiam eſſe duos rectos EBD, EBC; quæ autem eidem æqualia (i) inter



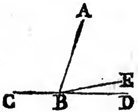
a 10. *def.*
b 11. *pri.*
c 19. *prõ.*
f 2. *prõ.*
g 19. *prõ.*
i 1. *prĩ.*

ter ſe æqualia. Duo igitur anguli ABC, ABD, æquales ſunt duobus rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea ſuper rectam conſiſtens &c. Quod oſtendere oportebat.

PROPOS. 14. THEOR. 7.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

SIt data recta AB, in qua punctum B, ad quod ex diuerſis partibus ductæ ſint duæ rectæ lineæ BC, BD, facientes cum AB, duos angulos ABC, ABD, vel rectos vel duobus rectis æquales. Dico ipſas BD, BE, taliter eſſe inter ſe conſtitutas vt CBD, ſit vna linea recta. Probatur. Si enim C BD, non eſt recta, producta DB, in directum, & continuum cadet aut ſupra BD, aut infra. Si cadit ſupra verbi gratia in E, cum ſuper



rectam CBE, inſiſtat recta AB, (a) fient duo anguli
a 13. primi. ABC, ABE, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli ABC, ABD, duobus rectis æquales (b)
b 12. pro. & omnes recti ſunt inter ſe æquales: Quare duo anguli ABC, ABE, duobus angulis ABC, ABD, erunt
c 3. pron. æquales: Ablato igitur communi angulo ABC, (c) remanebunt anguli ABE, ABD, inter ſe æquales, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non igitur recta BE, cadit ſupra rectam BD. Quoquo modo oſtendetur ipſam nec cadere infra ipſam BD; igitur CB, in directum producta eadem efficietur, quæ BD; ideoque ſi

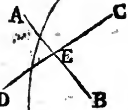
ad

ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOS. 15. THEOR. 8.

Si duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

Secent ſe duæ rectæ AB, CD, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, eſſe inter ſe æquales, angulum videlicet AEC, angulo DEB, & angulum AED, angulo CEB. Probatur. Quoniam enim recta AE, conſiſtit



ſuper rectam CD, (a) erunt duo anguli AEC, AED, duobus rectis æquales. Rurſus quia recta DE, conſiſtit ſuper rectam AB, (b) erunt duo anguli DEA, DEB, æquales duobus rectis. Cum igitur omnes anguli recti (d) ſint inter ſe æquales; erunt duo anguli AEC, AED, duobus angulis DEA, DEB, æquales. Dempto igitur communi angulo AED; (c) remanebit angulus AEC, angulo DEB, æqualis. Eadem ratione demonſtrabitur, angulos AED, CEB, inter ſe æquales eſſe: Si igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint &c. Quod oſtendere oportebat.

a 13. primi.
b 13. prõ.
d 3. prõ.
c 13. prõ.

COROLLARIVM. 1.

Euclides colligit ex demonſtratione huius Theorematis (ex ſententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc Corollarium non habent) duas lineas rectas ſeſe mutuo ſecantes, efficere ad punctum ſectiones quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonſtratione oſtenſum fuit, tam duos angulos AEC, AED, quam duos AED, DEB, duobus eſſe rectis æqua-

les

les per Propoſ.13. Quare omnes anguli ad E,conſtituti æquipollent bis duobus rectis angulis.

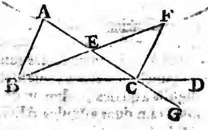
COROLLARIVM. 2.

Eadem ratione colligemus. omnes angulos circa vnum, & idem punctum conſtitutos quoſcumque fuerint, quatuor dumtaxat rectis angulis æquales eſſe: Si enim ex E, aliæ quotlibet lineæ educantur, diuidentur ſolummodo illi quatuor anguli ad E, conſtituti in
a19.prî. plures partes, (a) quæ omnes ſimul ſumptæ totis ſuis adæquantur. Ex quo perſpicuum eſt omne ſpatium punctum aliquod in plano circumſtans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi authores aſſerunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum conſtitui poſſunt, quatuor ſunt rectis angulis æquales. Simili modo conſtat, quotlibet lineas rectas ſe inuicem ſecantes, facere ad punctum ſectionis angulos æquales 4. rectis.

PROPOS. 16. THEOR. 9.

Cuiuſcumque trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & oppoſito maior eſt.

TRianguli ABC, latus BC, producatur ad D; Dico angulum externum ACD, maiorem eſſe interno, & oppoſito BAC, itemque maiorem interno, & oppoſito A BC. Diuidatur (a) enim AC, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta BE F, ita vt EF, (b) abſciſſa ſit æqualis rectæ



a 10. pri.
b 3. pri.

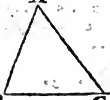
ſtæ EB, ducaturque recta FC. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia ſunt lateribus CE, EF, trianguli CEF, vtrumque vtrique per constructionem; ſunt autem, & anguli ad E, dictis lateribus æqualibus comprehenſi (c) inter ſe æquales, cum ſint circa verticem, & oppoſiti: Erit per ſecundam partem quartæ propoſitionis angulus EAB, æqualis angulo ECF; eſt autem angulus ACD, externus maior angulo ECF, cum ille ſit totus, & hic pars: igitur, & externus angulus ACD, (d) maior erit interno, & oppoſito EAB; Denuo ſi latus AC, producatur ad G, & latus BC diuidatur biſariam, & a puncto A, per punctum ſectionis, eo prorſus modo, quo ſupra factum fuit, ducatur linea facile erit demonſtrare angulum BCG, maiorem eſſe angulo interno, & oppoſito ABC, quo ſtante cum angulus BCG, (e) ſit æqualis angulo ACD, etiam angulus ACD (f) maior erit angulo ABC: cuiuſcumque ergo trianguli &c. Quod erat demonſtrandum.

c 15. pri.
d 1. ax.
e 15. pri.
f 1. ax.

PROPOS. 17. THEOR. 10.

Cuiuſcunque trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.

Sit triangulum ABC; dico duos angulos ABC, ACB, minores eſſe duobus rectis quomodocumque ſumantur. Producatur enim quoduis latus, nempe BC, in I. Quoniam igitur (a) angulus ACI, externus maior eſt interno & oppoſito ABC; ſi addatur communis angulus ACB, (b) erunt duo anguli ACI, ACB, maiores duobus angulis ABC, ACB, ſed duo ACI, ACB, (c) æquales ſunt duo-



a 16. pri.
b 4. pri.
c 13. pri.

duobus rectis. Igitur duo ABC, ACB, erunt minores duobus rectis, Eadem ratione erunt anguli CBA, BAC, minores duobus rectis, dummodo latus B A, producatur ita, vt angulus externus efformetur. Cuiuſcunque igitur trianguli duo anguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM 1.

Ex dictis conſtat in omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos. Cum enim per hanc propoſitionem duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, vt ſi vnus fuerit rectus, vel obtuſus quæmcunque reliquorum eſſe acutum, ne in triangulo duos angulos rectos, aut rectis maiores eſſe fateamur.

COROLLARIVM 2.

Sequitur etiam ex hac Propoſitione: ſi linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum ſcilicet acutum, & alterum obtuſum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam lineam rectam demiſſam cadere verſus partem acuti anguli. Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtuſum; demittaturque ex a 12. pri. puncto A, quocunque (a) ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam ſi non cadit ad partes anguli acuti, ſi fieri poteſt cadat ad partes anguli obtuſi ABC. & ſit verbi gratia AC; igitur duo anguli ABC, ACB, ſunt maiores duobus b 17 pri. rectis, cum vnus ſit rectus, & alter obtuſus (b) quod eſt abſurdum: quare perpendicularis cadet ad partes anguli acuti, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM 3.

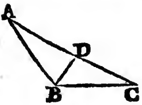
Pari ratione fit manifeſtum omnes angulos trianguli æqui-

æquilateri, & duos angulos trianguli iſoſcelis ſupra baſim eſſe acutos. Nam (c) cum & quilibet duo in c 5. pri.
triangulo æquilatero, & duo in iſoſcele ſupra baſim ſint inter ſe æquales; (d) ſintque ſimul tam illi duo, d 17. pri.
quam hi duobus rectis minores, erit quilibet illorum recto minor; hoc eſt acutus.

PROPOS. 18. THEOR. 11.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulorum ſubtendit.

IN triangulo ABC, ſit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, maiorem eſſe angulo ACB. Prob. E maiori latere AC, (a) auferatur AD, æqua- a 3. pri.
lis ipſi AB, ducaturque recta BD. Quoniam igitur duo latera AD, AB, per conſtructionem ſunt inter ſe



æqualia (b) erunt anguli b 5. pri.
ABD, ADB, inter ſe æquales: Eſt autem angulus (c) c 16. pri.
ADB, maior angulo ACB: igitur & angulus ABD, maior erit angulo ACB. Quamobrem cum (d) angulus d 9. pri.
totus ABC, ſit etiam maior angulo ABD, erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione ſi latus AC, ponatur maius latere BC, facile erit oſtendere, angulum ABC, maiorem eſſe angulo A. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIUM.

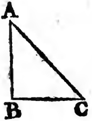
Ex hoc ſequitur omnes tres angulos trianguli ſcaleni eſſe inæquales, cum latera in huiuſmodi triangulis ſint inter ſe inæqualia.

PROPOS. 19. THEOR. 12.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

IN triangulo ABC, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus AC, ſubtendens maiorem angulum B, maius eſſe latere AB, quod angulum minorem C, ſubtendit. Probatur. Si enim latus AC, maius non eſt latere AB, erit vel æquale illi, vel minus: Si dicatur AC, æquale eſſe ipſi AB, (a) erit angulus B, æqualis angulo C; eſt autem, & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si verò AC, minus eſſe dicatur latere AB, erit angulus B, ſubtenſus à minori latere AC, minor angulo C, ſubtenſo à maiori latere AB; ponitur autem maior, quod maius eſt abſurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale ſit lateri AB, neque minus, ſequitur, quod ſit maius. Qua etiam ratione probabitur latus AC, maius eſſe latere BC, ſi angulus B, concedatur maior angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur, quod demonſtrandum erat.

a 5. pri.



COROLLARIVM.

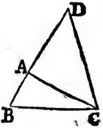
Sequitur ex hac Prop. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis eſt, eſſe minimam. Nam perpendicularis linea facit angulum rectum cum alia linea, vnde ſi ducatur alia linea, quæ non ſit perpendicularis, & conſtituat triangulum, angulus à tali linea conſtitutus erit acutus, ne in triangulo duo anguli ſint æquales duobus rectis. Quo ſtante maior erit linea, quæ non

non eſt perpendicularis, cum ipſa ſubtendat angulum maiorem, nempe rectum, perpendicularis verò ſubtendat angulum minorem, nempe acutum.

PROPOS. 20. THEOR. 13.

Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta.

SIt triangulum ABC, dico quælibet eius duo latera, nempe AB, AC, ſimul maiora eſſe reliquo latere BC. Producatur vnum ex illis lateribus, nempe AB, vſque ad D, taliter vt ſit recta AD, (a) æqualis alteri lateri non producto AC & ducatur recta DC. Quoniam igitur duo latera AD, AC, per constructionem ſunt inter ſe æqualia, (b) erunt anguli ADC, ACD, inter ſe æquales: Eſt autem angulo ACD, maior angulus (c) BCD; Igitur & angulus BCD, maior erit angulo ADC. In triangulo ergo BCD, latus BD, oppoſitum maiori angulo BCD, (d) maius erit latere BC, oppoſito minori angulo BDC. Cum igitur duo latera AB, AC, ſimul æqualia ſint ipſi BD, (ſi enim æqualibus AD, AC, commune addatur AB, (e) erunt tota æqualia, nimirum linea compoſita ex BA, & AC, & linea compoſita ex BA, & AD,) erunt quoque latera AB, AC, ſimul maiora latere BC. Eodem modo demonſtrabitur quælibet alia duo latera reliquo eſſe maiora. Quare omnis trianguli duo latera, &c. Quod erat oſtendendum.

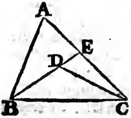


a 3. pri.
b 5. pri.
c 9. prõ.
d 19. pri.
e 2. prõ.

PROPOS. 21. THEOR. 14.

Si ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo ABC, ſuper extremitates B, & C, lateris BC, intra triangulum conſtituantur duæ rectæ lineæ BD, & CD, in puncto D, concurrentes. Dico BD, CD, ſimul minores eſſe duobus lateribus BA, CA, ſimul; At vero angulum BDC, maiorem angulo BAC. Probatur. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe BD, ad punctum E, lateris CA. Quoniam igitur in triangulo BAE, duo latera BA, AE,



a 20.pri. (a) maiora ſunt latere, BE,
b 4.prõ. ſi addatur commune EC, (b)
erunt BA, & AC, maiora quam BE, & EC. Ruſus
d 20,pri. quia in triangulo CED, duo latera CE, & ED (d)ma-
c 4. prõ. iora ſunt reliquo CD; ſi commune apponatur DB (c)
erunt CE, EB, maiora quam CD, & DB. Cum vero
oſtenſum fuerit etiam BA, & AC, maiora eſſe quam
CE, & EB; rurſus CE, & EB, demonſtrata ſunt ma-
e 21. ax. iora quam CD, & DB, ſequitur (e) quod BA, & AC,
maiora ſint quam CD, & DB. Quod in primis erat
f 16.pri. probandum. Præterea quoniam angulus BDC, (f)
maior eſt angulo DEC, externus interno, & oppoſito;
& angulus DEC, ob eandem cauſam maior eſt angu-
g 21.ax. lo BAC; (g) Erit angulus BDC, maior angulo BAC,
quod ſecundum propoſitum fuit. Si igitur ſuper trianguli vno latere &c. Quod erat oſtendendum.

PRO-

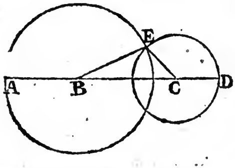
PROPOS. 22. PROBL. 8.

Ex tribus rectis lineis, quæ ſint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

Sint datæ tres lineæ rectæ AB, BC, CD, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores (alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, vt conſtat ex Prop. 20.) oporteatque conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Si datæ rectæ lineæ fuerint ſeparatæ aſſumatur aliqua linea indefinitè producta, à qua abſcindantur (a) tres lineæ æquales tribus iam datis, quo poſito iuxtà regulas mox tradendas triangulum conſtituatur. Si verò datæ lineæ vt in noſtra figura componant vnam lineam rectam AD, facto centro in B, interuallo lineæ BA (b) deſcribatur circulus AE. Item centro C, interuallo lineæ CD, deſcribatur circulus alius DE, qui neceſſariò ſecabit priorem circulum in puncto E, (cum enim duæ AB, CD, maiores ponantur recta BC; & circulus AE, ex linea BC abſcindat lineam æqualem ipſi BA; non poterit circulus DE, ex CB abſcindere lineam æqualem ipſi CD, niſi cadat, & ſecet circulum AE, ſecus ſi ſe tangerent ipſa BC, eſſet æqualis duabus

a 3. pri.

b 3. poſt.



AB, & CD; quod eſt contra ſuppoſitum. Ex puncto igitur ſectionis E, ad puncta B, & C, ducantur rectæ EB, EC, factumque erit triangulum BEC, cuius latera dico æqualia eſſe datis lineis AB, BC, & CD. Probatur. Recta BE (c) æqualis eſt rectæ BA, & recta CE æqualis eſt rectæ CD: Igitur omnia tria latera ſunt tribus datis lineis æqualia, quo ſtante conſtituimus triangulum ex tribus rectis lineis, tribus datis rectis lineis æqualibus: Quod erat faciendum.

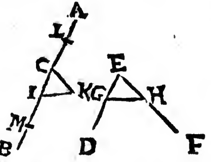
c 15. def.

PROPOS. 23. PROBL. 9.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

Data recta ſit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF: Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum conſtituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, vtrunque duo puncta G, & H, & conectantur recta GH: Deinde conſtituatur triangulum CIK, (a) habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita vt CI æquale ſit ipſi EG, & CK, ipſi EH, & IK, ipſi GH. (quod facile fiet ſi CI, ſumatur æqualis ipſi EG, & CL, ipſi EH, & IM, ipſi GA. Deinde ex centris C, & I, interuallis vero CI, & IM, circuli deſcribantur ſecantes ſe in K, &c.) Dico angulum ICK, æqualem eſſe angulo E. Probatur. Quoniam enim duo

a 22. pri.

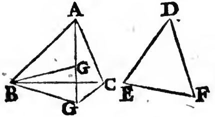


duo latera CI, & CK, æqualia ſunt duobus lateribus EG, & EH, vtrumque vtrique, & baſis IK, baſi GH, per conſtructionem; (b) erit angulus C, angulo E, æqualis. Ad punctum igitur C, efficimus angulum æqualem angulo E. Quod facere oportebat. b 8. pri.

PROPOS. 24. THEOR. 15.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: & baſim baſi maiorem habebunt.

DVo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus, DE, DF, trianguli DEF, vtrunque vtrique, nempe AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; Angulus vero BAC, maior ſit angulo D. Dico baſin BC, maiorem eſſe baſe EF. Ad lineam enim BA, atque ad eius punctum A, (a) conſtituatur angulus BAG, æqualis angulo D, (cadetque recta AG, intra triangulum BAC, a 23. pri.



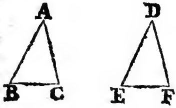
cum angulus BAC, ponatur maior angulo D,) (b) ponaturque AG, æqualis ipſi DF, hoc eſt ipſi AC; ducta denique recta BG, cadet vel ſupra rectam BC, vel in ipſa BC, aut infra. Cadat in primis ſupra rectam BC, vt eſt BG. Intra triangulum ACB, ab iiſdem extremitatibus AB, ad punctum G, ductæ fuerunt duæ rectæ lineæ AG, BG, minores (c) ipſis AC, CB: rurſus quia AG, per conſtructionem facta fuit æqualis ipſi AC, ſi auferantur (d) remanebit BC, maior quam BG; b 3. pri. c 21. pri. d 4. prī.

BG; Rurſus per conſtructionem BA, AG, æqualia ſunt lateribus ED, DF, & angulus BAG, æqualis angulo EDF, (e) quare etiam baſis BG, æqualis erit baſi EF: ſi igitur BC demonſtrata fuit maior quam BG, maior etiam erit ipſa EF. Quod erat demonſtrandum. Si vero BG, cadat infra BC; fiat pariter AG, æqualis ipſi DF, vel AC, ducaturque GC. Quoniam enim duo latera AC, AG, in triangulo ACG, ſunt æqualia; (f) erunt anguli ſupra baſin inter ſe æquales, nempe ACG, AGC; Eſt autem angulus BGC, (g) maior angulo AGC; quare etiam maior erit angulo ACG; ſed angulus ACG, (h) maior eſt angulo GCB; quare multo maior erit totus angulus BGC, angulo GCB. In triangulo igitur BGC, (i) maius erit latus BC, latere BG. Per quartam autem primi oſtenditur BG, æqualis ipſi EF; vnde maior quoque erit BC, quam EF; quod pariter demonſtrandum erat. Si igitur duo latera duobus lateribus &c. Quod erat oſtendendum.

e 4. pri.
f 5. pri.
g 9. prõ.
h 9. prõ.
i 19. pri.

PROPOS. 25. THEOR. 16.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, baſim vero baſi maiorem; & angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.



DVo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF. vtrunque vtrique, hoc eſt AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; baſis autem BC, maior ſit baſe EF.

EF. Dico angulum A, maiorem eſſe angulo D. Probatur. Si enim non eſt angulus A, maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur quod ſit æqualis, cum etiam duo latera circa angulum A, æqualia ſint duobus lateribus circa angulum D, vtrunque vtrique per hypotheſin; (a) erit & baſis BC, æqualis baſi EF: quod eſt abſurdum, cum baſis BC, ponatur maior baſe EF. Si vero angulus A, dicatur eſſe minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa iſtos angulos, baſis EF, (b) maior baſe BC, quod magis eſt abſurdum, cum EF, ponatur minor quam BC. Quare angulus A, cum neque poſſit æqualis eſſe angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

a 4. primi.

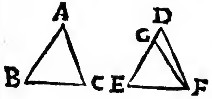
b 24. primi.

PROPOS. 26. THEOR. 17.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint vtrunque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſiue quod vni æqualium angulorum ſubtenditur, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SInt duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, vterque vtrique, hoc eſt B, ipſi E, & C, ipſi EFD; ſitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adiacet, lateri EF,

EF; quod angulis E, & EFD, adiacet, æquale. Dico reliqua quoque latera AB, & AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia eſſe vtrumque vtrique, hoc eſt AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; ea nimirum, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur; reliquumque angulum A, æqualem eſſe reliquo angulo D. Probatur. Si enim latus AB, non eſt æquale lateri DE, ſit DE, maius, (a) à quo abſcindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturque recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia ſunt lateribus GE, & EF, vtrunque vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypotheſin: (b) erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo EFD. Quare, & angulus EFG, eidem angulo EFD, æqualis erit, pars toti: quod eſt abſurdum; non eſt igitur latus AB, inæquale lateri DE, ſed æquale. Quamobrem cum latera AB, BC, æqualia ſint lateribus DE, EF, vtrumque vtriq; & anguli contenti B, & E, æquales; (c) erunt, & baſes AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod fuit propoſitum.

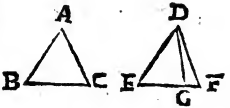


a 3. *pri.*

b 4. *pri.*

c 4. *pri.*

Sint deinde latera AB, DE, ſubtendentia æquales angulos C, & EFD, inter ſe æqualia. Dico rurſus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, eſſe æqualia vtrunque vtrique, hoc eſt BC, ipſi EF, & CA, ipſi FD, reliquumq; angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, non eſt æquale lateri EF, ſit EF, maius, (d) ex quo ſumatur recta EG, æqualis ipſi BC, ducaturque recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia ſunt lateribus



d 3. *pri.*

bus

bus DE, & EG, vtrunque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales per hypotheſin; (e) erit angulus C, æqualis angulo EGD: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æquales; igitur & angulus EGD, eidem angulo EFD, æqualis erit, externus interno, & oppoſito, quod eſt abſurdum (f) eſt enim maior. Non eſt ergo latus BC, lateri EF, inæquale. Quo circa, vt prius, colligetur inſtitutum ex 4 Propoſ. huius Libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis &c. Quod erat demonſtrandum.

e 4. *pri.*

f 16. *pri.*

COROLLARIVM.

Sequitur ex demonſtratione huius Theorematis tota etiam triangula, quo ad areas eſſe æqualia. Nam ſi latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia ſunt, vt oſtenſum fuit, contineantque ex hypotheſi, angulos B, & E, æquales; (a) erunt quoque tota triangula inter ſe æqualia.

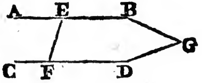
a 4. *pri.*

PROPOS. 27. THEOR. 18.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit; parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AEF, EFB, inter ſe æquales. Dico lineas AB, CD, eſſe parallelas. Probatur. Si enim

enim non ſunt parallelæ coibunt, ſi producantur infinite. Si autem nunquam coirent parallelæ eſſent, vt habetur ex definitione parallelarum. Conueniāt ergo ad partes B, & D, in puncto G Quoniam



igitur triangulum eſt EGF, (cum AB, & CD, continuatæ ſint rectæ vſque ad punctum G;) & angulus AEF, poſitus eſt æqualis angulo EFD; erit externus angulus AEF, æqualis interno, & oppoſito EFD; quod eſt abſurdum. Hoc etiam inconueniens demonſtrabitur, ſi dicatur lineas AB, CD, coire ad partes A, & C; non igitur coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt. Eodem prorſus modo, ſi ponantur anguli alterni BEF, EFC, æquales, demonſtrabitur lineas AB, CD, eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas &c. Quod oſtendendum erat.

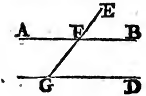
PROPOS. 28. THEOR. 19.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit: Aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, GD, recta incidens EG, faciat primo externum angulum EFB, æqualem angulo interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes FGD. Dico rectas AB, GD eſſe parallelas. Probatur. Quo-

uiam

niam enim angulo E F B, æqualis ponitur angulus F G D; & eidem angulo E F B, (a) æqualis eſt angulus AFG; erunt (b) anguli alterni AFG, FGD, æquales. Quare lineæ AB, GD, (c) parallelæ erunt. a 15. pri. b 1. pro. c 27. pri.



Deinde ſi faciat recta EG, angulos internos, & ad eaſdem partes, nempe BFG, FGD, duobus rectis æquales. Dico rurſus, rectas AB, GD, eſſe parallelas. Probatur. Quoniam enim anguli BFG, DGF, duobus rectis æquales ponuntur; ſunt autem & anguli BFG, AFG, (d) duobus rectis æquales; erunt duo anguli AFG, BFG, duobus angulis BFG, DGF, æquales: ablato igitur communi angulo BFG, remanebunt duo anguli alterni AFG, DGF, inter ſe æquales. Quare (e) parallelæ erunt rectæ AB, GD; Si igitur in duas rectas recta incidens, &c. Quod erat oſtendendum. d 13. pri. e 27. pri.

SCHOLIVM.

Vſque adhuc pronunciatum 13. à principiorum numero reicimus. Verum quia ſequens Propoſ. 29. cum alijs multis illi ita innititur, vt ſine eius auxilio demonſtrari nequeat, opere pretium erit illud hoc loco demonſtrare, vt in expoſitione dicti axiomatis polliciti ſumus.

Quia vero demonſtratio 13. theorematis: dependet à nonnullis alijs theorematibus à Proclo, & alijs adductis, bonum erit ipſa in medium afferre; relinquendo tamen breuitatis gratia demonſtrationes, quæ videri poſſunt apud Clauium, qui exactiſſimè poſt 28. Propoſ. primi libri hanc materiam proponit.

THEO-

THEOREMA 1.

Si ab vno puncto duæ rectæ linæ angulum facientes infinite producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedet.

THEOREMA 2.

Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quædam recta linea, reliquam quoque productam ſecabit.

THEOREMA 3.

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

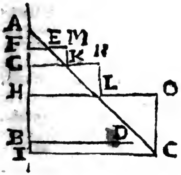
Demonſtrationes iſtorum Theorematum ommittuntur breuitatis gratia; cum videri poſſint apud citatum Clauium in hoc loco. Pro nunc vero vti demonſtrata habeantur.

THEOREMA 4. & AXIOMA 13.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea internos, ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productę ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

Hoc

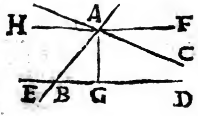
HOc eſt axioma 13. quod taliter demonſtratur. Incidens recta AB, in rectas AC, BD, faciat internos, & ad eaſdem partes angulos ABD, BAC, duobus rectis minores. Dico rectas AC, BD, ad partes C, D, productas coire. Probatur. Sit enim primum alter angulorum, nempe ABD, rectus, & alter BAC, acutus. Sumpto in recta AC, quolibet puncto E, (a) ducatur ex eo ad rectam AB, perpendicularis EF, & rectæ AF, æqualis accipiatur FG, & GH, æqualis ipſi AG, & HI, ipſi AH, ita vt AG, ipſius AF, & AH ipſius AG, & AI ipſius AH, dupla ſit. Et quoniam ſi rectæ AF, abſcindantur continuè æquales rectæ ex AB, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finita recta AB, per continuam ablationem vnius, eiuſdemque quantitatis abſumatur tandem, quandoquidem linea AF, ita multiplicari poteſt, vt tandem aliquando finitam lineam AB, ſuperet. Id quod Euclides frequenter aſſumit in libro 5. & alijs ſequentibus; vbi datis duabus magnitudinibus inæqualibus proportionem inter ſe habentibus iubet plerumque minorem ita multiplicari, donec maiorem ſuperet. Fit vt multo magis, ſi ipſi AE, æqualis abſcindatur FG, & toti deinde AG, non autem ſoli AF, æqualis auferatur GH. Item toti AH, non autem ſoli AF, vel AG, æqualis dematur HI; & ſic deinceps, cadet tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo exiſtere vltra punctum B. Accipiatur quoque in recta AC, recta EK, ipſi AE, & KL, ipſi AK, & IC, ipſi AI, æqualis, ita vt tot ſint partes in recta AC, quot ſunt in recta AI; ducanturque rectæ KG, LH, CI, producanturque vna cum EF, vt EM,



a 12. pri.

vt EM, KN, IO, ipſis EF, KG, LH, fiant æquales, ac tandem rectæ iungantur MK, NL, CC. Itaque quoniam duo latera KE, & EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli AEF, per constructionem
a 15.pri. vtrunque vtrique ſunt æqualia, anguloſque (a) conti-
b 4. pri. nent ad verticem æquales, erit & baſis MK, (b) baſi AF, & angulus M, angulo F, æqualis. Eſt autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus per con-
c 1. pro. ſtructionem. Igitur & MK, FG, (c) æquales erunt inter ſe, & angulus M, quoque rectus. Quare cum ad FM, excitatæ ſint duæ perpendiculares æquales FG, & MK, erit per antecedens theorema angulus G, rectus. Rurſus quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia ſunt
d 15.pri. ex constructione, (d) anguloſque comprehendunt
e 4. pri. æquales ad verticem K, (e) erit & baſis NL, baſi AG, & angulus N, angulo G, æqualis. Eſt autem & GH, ex constructione eidem AG, æqualis, & angulus G, rectus, vt proximè demonſtratum eſt: igitur & NL,
f 1 pron. GH, (f) inter ſe æquales erunt, & angulus N, quoque rectus. Quo circa per præcedens theorema erit etiam angulus A, rectus. Eadem ratione oſtendemus angulum I, eſſe rectum, atque ita deinceps, ſi plures
g 28.pri. eſſent partes rectæ AB. Eſt autem & angulus B, per hypotheſim rectus: igitur rectæ IC, BD, (g) parallelæ ſunt ac propterea per ſecundum theorema BD, producta rectam AC, ſecabit ſupra punctum C, atque adeo in puncto illo ſectionis rectæ AC, BD, coibunt. Quod erat demonſtrandum.

Si autem neuter angulorum ABD, BAC, rectus ſit, at quidem ABD, acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtuſus.



Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis ponuntur
h 13.pri. minores; (h) ſunt autē duo anguli ABD, DBE,

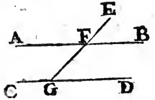
DBE, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores; ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus DBE, reliquo BAC. Conſtituatur in A, (i) ad rectam AB, angulus BAF, angulo DBE, æqualis, cadetque recta AF, ſupra rectam AC, cum AF, maiorem angulum cum AB, contineat, quàm AC. Quia igitur externus angulus DBE, interno BAF, ex eadem parte oppoſito æqualis eſt, (k) erunt rectæ AF, BD, inter ſe parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad BD, (l) perpendicularis AG, quæ ex Coroll. 2. prop. 17. huius libri ad partes acuti anguli ABD, cadet: eritque angulus GAF, rectus. Nam ſi acutus eſſe dicatur efficiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum; ac proinde vt proximè demonſtrauimus, rectæ AF, BD, ad partes F, & D, tandem productæ coibunt. Quod eſt abſurdum: oſtenſæ enim ſunt parallelæ. Si autem angulus GAF, dicatur eſſe obtuſus erit GAH, acutus; quare ex proximè demonſtratis coibunt rectæ AF, BD, ad partes H, & B, productæ, quod eſt abſurdum, cum parallelæ ſint oſtenſæ. Non eſt ergo angulus GAF, acutus, aut obtuſus. Igitur rectus, ac proinde eius pars acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, & D, vt proximè demonſtrauimus. Si igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, quorum neuter rectus ſit, ipſæ rectæ productæ tandem coibunt ad illas partes, ad quas ſunt anguli duobus rectis minores. Quod erat oſtendendum. Quod ſi quando accidat, rectam AC, exiſtere inter AB, AG, clarè conſtat rectas AC, BD, coire, quod tunc AC, baſim BG, trianguli BAG, ſecaret. Quibus poſitis ad ſeriem propoſ. Euclidis reuertamur.

i 23. pri.
k 28. pri.
l 12. pri.

PROPOS. 29. THEOR. 20.

In parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter ſe æquales efficit; & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB, CD, incidat recta EG. Dico primum, angulos alternos AFG, FGD, inter ſe eſſe æquales. Probatur. Si enim non ſunt æquales ſit alter nempe AFG, maior. Quoniam igitur angulus AFG, maior eſt angulo FGD, ſi addatur communis
a 4. prõ. angulus BFG, (a) erunt duo AFG, BFG, maiores
b13.prõ. duobus BFG, FGD; At duo AFG, BFG, (b) ſunt æquales duobus rectis: igitur duo BFG, FGD, duobus rectis minores erunt. Quare cum ſint interni, &
c13.prõ. ad eaſdem partes B, & D, (c) coibunt lineæ AB, CD, ad eas partes, quod eſt abſurdum, cum ponantur eſſe parallelæ. Non igitur angulus AFG, maior eſt angulo FGD; ſed neque minor. Eadem enim ratione oſtenderetur, rectas coire ad partes A, & C; Igitur æquales erunt anguli alterni AFG, FGD. Eademque eſt ratio de angulis alternis BFG, FGC.



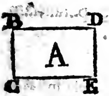
Dico ſecundò, angulum externum EFB, æqualem eſſe interno, & ad eaſdem partes oppoſito FGD. Probatur. Quoniam enim angulo DGF, æqualis eſt angulus alternus AFG, vt oſtenſum eſt; & eidem AFG,
d15.pri. (d) æqualis eſt angulus EFB; erunt anguli EFB,
e 1.pron. DGF, (e) inter ſe æquales. Eodem modo demonſtrabitur angulum EFA, æqualem eſſe angulo FGC.

Dico

Dico tertio, angulos internos, & ad eaſdem partes BFG, FGD, æquales eſſe duobus rectis. Prob. Quoniam enim oſtenſum fuit, angulum externum FB, æqualem eſſe angulo interno, & oppoſito FGD; ſi addatur communis BFG, (f) erunt duo EFB, BFG, æqua- f 2. prõ.
les duobus BFG, FGD: Sed duo EFB, BFG, ſunt æquales (g) duobus rectis; igitur & duo anguli BFG, g 13. pri.
FGD duobus rectis æquales erunt. Eodem modo anguli AFG, FGC, erunt duobus rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex hac propoſ. ſequitur, quod ſi in parallelogrammo vnus angulus ſit rectus, etiam reliqui recti ſunt.



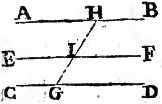
Cum enim lineæ oppoſitæ in parallelogrammo ſint parallelæ, vt BD, CE, & in ipſas incidat recta BC, (a) erunt duo anguli DBC, ECB, a 29. pri.
æquales duobus rectis; ſed vnus, nempe DBC, ſupponitur rectus; igitur & ECB, rectus erit. Rurſus quia in parallelas BC, DE, incidit recta BD, (b) erunt duo anguli interni CBD, BDE, b 29. pri.
duobus æquales; ſed B, ſupponitur rectus igitur & D, rectus erit, quod idem demonſtrabitur de angulo E, ergo &c.

PROP. 30. THEOR. 21.

Quæ eidem rectę lineę parallelę, & inter ſe ſunt parallelę.

SInt rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico, & ipſas AB, CD, eſſe parallelas. Probatur. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur eſ-

ſe plano, (nam in propoſ.9. vndecimi agitur de lineis in diuerſis planis) ducta recta HG, ſecabit omnes in punctis HI, & G. Quia igitur AB, ponitur paral-

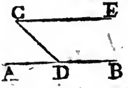


a29.pri. lela ipſi EF (a) erit angulus AHI, æqualis angulo HIF. Rurſus quia CD, ponitur paralſela ipſi EF,
erit angulus externus HIF, (b) æqualis interno, &
b29.pri. oppoſito IGD. Quare anguli AHI, IGD, (c) quoque
c1.prō. inter ſe æquales erunt. Cum igitur ſint alterni; (d)
d27.pri. erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter ſe. Quæ igitur
eidem rectæ lineæ &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. 31. PROBL. 10.

A dato puncto, datæ rectę lineę parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto C, ducenda ſit linea parallela ipſi AB. Ducatur ex C, ad AB, linea CD, vtcunque faciens angulum quemcunque CDA; cui ad C;
a23.pri. (a) æqualis conſtituatur angulus DCE. Dico rectam EC, extenſam quantumlibet parallelam eſſe ipſi AB. Probatur. Cum enim anguli alterni CDA, DCE, æquales ſint per conſtructionem (b)
b27.pri. erunt rectæ AB, CE, parallelæ.



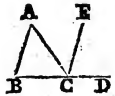
A dato igitur puncto datæ rectæ lineæ &c. Quod faciendum erat.

PRO-

PROPOS. 32. THEOR. 22.

Cuiuſcunque trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus rectis ſunt æquales.

IN triangulo ABC, producatur latus BC, ad D. Dico primò, angulum externum ACD, æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis ſimul A, & D. Probatur. (a) Ducatur enim ex C, linea CE, parallela rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, (b) erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rurſus quia recta BD, incidit in parallelas AB, CE, (c) erit angulus externus ECD, æqualis interno, & oppoſito B; Additis igitur æqualibus ACE, & A, (d) fiet totus ACD, (qui ex duobus DCE, ACE, componitur) duobus A, & B, ſimul æqualis. Quod fuit propoſitum.



a 31. primi.

b 29. pri.

c 29. pri.

d 1. pri.

Dico ſecundò, tres angulos internos eiuſdem trianguli A, B, & ACB, duobus eſſe rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, vt oſtenſum fuit, æqualis ſit duobus internis A, & B; ſi addatur communis ACB, (e) erunt duo anguli ACD, ACB, æquales tribus A, B, & ACB: ſed duo ACD, ACB, (f) æquales ſunt duobus rectis: igitur, & tres interni A, B, ACB, duobus erunt rectis æquales. Quare cuiuſcunque trianguli &c. Quod erat demonſtrandum.

e 2. pro.

f 13. pri.

COROLLARIVM. 1.

Ex hac Propoſ. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli ſimul ſumptos æquales eſſe tribus angulis cuiuſcunque alterius trianguli ſimul ſumptis. Quia omnes ſunt æquales duobus rectis. Vnde ſi duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius, reliquo huius æqualis, æquiangulaque erunt ipſa triangula.

COROLLARIVM 2.

Conſtat etiam in omni triangulo iſoſcele, cuius angulus à lateribus æqualibs comprehenſus rectus fuerit, quemlibet reliquorum eſſe ſemirectum. Nam ſi reliqui duo ſimul conficiunt vnum rectum; (a) cum omnes tres ſint æquales duobus rectis, & tertius ille ponatur rectus. Quare (b) cum reliqui duo ſint æquales, erit quilibet eorum ſemirectus. Si vero angulus fuerit obtuſus, reliqui duo anguli æquales, ſemirecto minores erunt, & è contra ſi erit acutus.

a 32. pri.

b 5. pri.

COROLLARIVM 3.

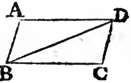
Pariter perſpicuum eſt in triangulo æquilatero, quemuis angulum eſſe duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum; nam duo anguli recti diuiſi in tres angulos faciunt duas tertias partes vnius recti.

PRO-

PROPOS. 33. THEOR. 23.

Rectæ lineæ, quæ ęquales, & parallelas lineas ad eaſdem partes coniungunt; & ipſe ęquales, & parallelę ſunt.

SInt rectæ linæ AD, BC, æquales, & parallelæ, ipſas autem coniungant ad eaſdem partes rectæ AB, DC. Dico ipſas AB, DC, æquales quoque eſſe, & parallelas. Probatur. Ducatur enim recta BD.



Quoniam igitur BD, incidit in parallelas AD, BC; (a) erunt anguli alterni ADB, DBC, inter ſe æquales. Quare cum duo latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia ſint duobus lateribus, CB, BD, trianguli CBD, vtrunque vtrique; & anguli quoque dictis lateribus incluſi æquales; (b) erunt baſes AB, DC, æquales, & angulus ABD, angulo BDC, æqualis. Cum igitur hi anguli ſint alterni inter rectas AB, DC, (c) erunt AB, DC, parallelæ: Probatum autem iam fuit eaſdem eſſe æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas, &c. Quod erat demonſtrandum.

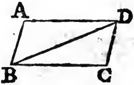
a 29. pri. b 4. pri. c 27 pri.

PROPOS. 34. THEOR. 24.

Parallelogrammorum ſpatiorum ęqualia ſunt inter ſe, quę ex aduerſo & latera, & anguli; atque illa biſariam ſecat diameter.

SIt parallelogrammum ABCD, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita AB, DC, nec

non etiam AD, BC, inter ſe eſſe æqualia. Item angulos oppoſitos B, D, & A, C, eſſe inter ſe æquales: Denique ducta diametro BD, parallelogrammum ipſum biſariam ſecari. Probatur. Cum enim AD, BC, ſint parallelæ (a) erunt anguli alterni ADB, DBC, æquales. Rurſus quia AB, DC, ſunt parallelæ, (b) erunt, & anguli alterni BDC, DBA, æquales. Itaque cum anguli CDB, DBC, trianguli CDB, æquales ſint duobus angulis ABD, BDA, trianguli DAB, vterque vtrique: & latus BD, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; (c) erit recta AD, æqualis oppoſitæ rectæ BC, & recta AB, oppoſitæ rectæ DC, quod eſt primum. Erit rurſus eadem de cauſa angulus A angulo C, æqualis. Et quia ſi æqualibus angulis ADB, DBC, addantur æquales anguli ABD, BDC, (d) toti quoque anguli ADC, ABC, fiunt æquales: conſtat ſecundum, angulos oppoſitos eſſe æquales. Quoniam vero duo latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia ſunt duobus lateribus CB, BD, trianguli CBD, vtrunque vtrique, & angulus ADB, æqualis angulo CBD, vt oſtenſum eſt; erunt triangula DAB, DCB, æqualia, ideoque parallelogrammum ABCD, diuiſum erit biſariam à diametro BD, quod tertio loco fuit propoſitum. Parallelogrammorum igitur ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, &c. Quod oſtendendum erat.



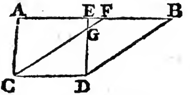
a 29. primi.
b 29. primi.
c 26. pri.
d 2. pri.

PRO-

PROPOS. 35. THEOR. 25.

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

INter duas parallelas AB, CD, ſuper baſi CD, exiſtant duo parallelogramma CDEA, CDBF, (dicuntur autem parallelogramma in eiſdem eſſe parallelis, quando dua latera oppoſita partes ſunt parallelarum, vt in exemplo propoſito cernitur.) Dico ipſa parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quo ad angulos, & latera, ſed quo ad aream, ſeu capacitatem. Probatur. Quoniam igitur in parallelogrammo CDEA,



recta AE, (a) æqualis eſt rectæ CD, oppoſitæ, & eidem CD, æqualis eſt oppoſita FB, in parallelogrammo CDFB; (b) erunt AE, FB, inter ſe æquales; ſi communis addatur EF, (c) erit tota AF, toti EB, æqualis; nec non etiam angulus BED, (d) æqualis eſt interno, & oppoſito FAC; eſt autem AC, (e) ipſi ED, æqualis. Quare triangulum BFD, triangulo FAC, (f) æquale erit; ablato ergo communi triangulo EGF, (g) remanebit trapezium ACGE, trapezio FGBD, æquale: Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia, Quod erat oſtendendum.

a 34. pri.
b 1. prõ.
c 2. prõ.
d 29. pri.
e 34. pri.
f 4. pri.
g 3. prõ.

PROPOS. 36. THEOR. 26.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia,

Sint duo parallelogramma ACEH, GFBD; ſuper æquales baſes CE, & FD, inter eaſdem parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Probatur. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta
a 34.pri. CE, æqualis ponitur rectæ FD, & eidem FD,(a) æqualis eſt GB, in parallelogrammo GFDB, oppoſita;
b 1.prō. (b) erunt CE, GB, æquales inter ſe: ſunt autem & parallelæ per hypotheſin. Quare & CG, EB, ipſas coniungentes,
c 33.pri. (c) parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque



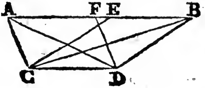
cum parallelogramma ACEH, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, (d)
d 35.pri. erit parallelogrammum ACEH, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallogramma GCEB, GFBD, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin GB; (e) erit quoque parallelogrammum
e 35.pri. GFDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEH, GFDB, (f) inter
f 1.prō. ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.

PRO-

PROPOS. 37. THEOR. 27.

Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

INter parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, ſint conſtituta, duo triangula ACD, BCD, (dicitur autem triangulum inter duas eſſe parallelas conſtitutum, quando baſis eſt pars vnius, & angulus oppoſitus alteram attingit.) Dico ea triangula eſſe æqualia. Probatur. Per D, enim (a) ducatur DF, parallela rectæ AC, & CE, parallela ipſi DB. (b) Erunt igitur parallelogramma ACDF, ECDB, æqualia; ſunt enim ſuper eandem baſin CD, & inter eaſdem parallelas AB, CD. Sed horum parallelogrammorum dimidia ſunt triangula ACD, BCD; (c) quod AD, BC, diametri bifariam ſecent parallelogramma ACDF, ECDB; Igitur & triangula ACD, CDB, (d) æqualia erunt. Triangula igitur ſuper eadem baſi, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 31. pri.
b 35. pri.
c 34. pri.
d 7. prō.

PRO-

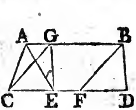
PROPOS. 38. PROBL. 28.

Triangula ſuper ęqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt ęqualia.

INter parallelas AB, CD, & ſuper æqules baſes CE, FD, ſint conſtituta triangula ACE, BFD. Dico ipſa eſſe æqualia. Probatur. Ducatur enim ex C, linea CG, parallela ipſi FB, deinde a puncto G, ad punctu E, ducatur linea GE. Quoniam vero CG, FB, ſunt latera oppoſita in parallelogrammo GCFB; (a) erunt inter ſe æqualia; rerſus baſes CE, & FD, ſupponuntur æquales, nec non etiam angulus BFD, (b) æqualis eſt interno, & oppoſito GCE: iam habemus duo triangula BFD, GCE, quæ habent duo latera BF, FD, duobus lateribus GC, CE, æqualia alterum alteri, & angulos dictis lateribus comprehenſos æquales:

a 34. pri.

b 29. pri.



c 4. pri.

Quare iſta duo triangula (c) erunt æqualia. Sed etiam triangulum ACE, æquale eſt eidem triangulo GCE, (quia ſunt ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis) ergo etiam triangula ACE, & BFD, (d) erunt inter ſe æqualia. Triangula igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis &c. Quod fuit propoſitum.

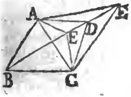
d 1. prõ.

PRO-

PROPOS. 39. THEOR. 29.

Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem ſunt parallelis.

Sint duo triangula æqualia ABC, DBC, ſuper eandem baſin BC, & ad eaſdem partes. Dico ipſa eſſe inter eaſdem parallelas conſtituta, hoc eſt rectam ductam à puncto A, ad punctum D, parallelam eſſe ipſi BC. Probatur. Si enim non eſt, (a) ducatur ex A, parallela ipſi BC, quæ vel cadet ſupra AD, vel infra Cadat primum ſupra, & ſit AE, coeatq; cum BD, protracta in E, ducaturque recta EC. Quoniam enim parallelę ponuntur AE, BC, (b) erit triangulo BAC, æquale triangulum BEC. Eſt autem per ſuppoſitionem eidem triangulo BAC, æquale triangulum BDC. Igitur (c) erunt triangula BEC, BDC, inter ſe æqualia, quod eſt impoſſibile, quia BDC, eſt pars, BEC, vero eſt totum. Si vero parallela cadit infra AD, vt in data figura eſt alia AE, facile erit eiſdem rationibus demonſtrare aliud abſurdum, nempe triangulum BEC, æquale eſſe triangulo BDC, quod eſt impoſſibile cum vnum ſit pars & aliud totum. Erit igitur AD, parallela ipſi BC. Quare triangula æqualia ſuper eadem baſi &c. Quod erat oſtendendum.



a 31. pri.

b 37. pri.

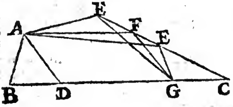
c 1. pri.

PRO-

PROPOS. 40. THEOR. 30.

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis.

Sint duo triangula BAD, GFC, ſuper æquales baſes BD, GC, (quæ in eadem recta linea collocentur) & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis, hoc eſt rectam ex A, ad F, ductam parallelam eſſe rectæ BC. Probatur. Si enim non eſt, cadet parallela ducta ipſi BC, ex A, vel ſupra AF, vel infra. Cadat primum ſupra,



eo eatque cum CF, producta in E, & ducatur recta EG. Quoniam igitur parallelæ ſunt AE, BC, (a) erit triangulum GEC, æquale triangulo BAD; ponitur autem & triangulum GFC, æquale triangolo BAD: Igitur triangula GEC, GFC, (b) erunt æqualia inter ſe, pars, & totum. Quod eſt abſurdum. Quod ſi vero parallela ducta per A, cadat infra AF, qualis eſt denuo alia AE, ducatur alia recta GE, erunt eadem prorſus argumentatione triangula GFC, GEC, æqualia, totum, & pars. Quod eſt abſurdum. Eſt igitur AF, parallela ipſi BC; quare triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus &c. Quod erat demonſtrandum.

a 38. pri.

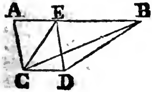
b 1. pr8.

PRO-

PROPOS. 41. PROBL. 31.

Si parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in ciſdemque fuerit parallelis; duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

INter parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, conſtituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum CBD. Dico parallelogrammum ACDE, duplum eſſe trianguli CBD. Probatur. Ducta enim diametro CE, in parallelogrammo ACDE, (a) erunt ACE, ECD, æqualia: quare parallelogrammum ACDE, duplum erit trianguli ECD: ſed triangulum ECD, (b) æquale eſt triangulo CBD, cum ſint ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis: Quare & trianguli CBD, (c) duplum erit parallelogrammum ACDE. Quapropter ſi parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.



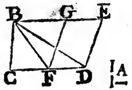
a 34. pri.
b 37. pri.
c 6. prĩ.

PROPOS. 42. PROBL. 11.

Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

DAtum triangulum ſit BCD, & datus angulus Rectilineus A, oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo BCD, habens angulum æqualem angulo A. Diuidatur vnum latus trianguli, nempe CD, (a) bifariam in F, & fiat angulus a 10. pri.
GFD,

b 23.pri. GFD, (b) æqualis angulo A, pro vt libet, hoc eſt ſiue angulus GFD, vergat ad partes D, ſiue ad partes C, pro vt magis videbitur expedire. Ducatur item
c 31.pri. per B, (c) rectæ CD, parallela BE, quæ ſecet FG, in G; Rurſus per D, vel C, ducatur
d 31.pri. ipſi FG, (d) parallela DE, occurrens rectæ BG, productæ in E; Eritque in angulo GFD, qui dato angulo rectilineo A, factus eſt æqualis, conſtitutum parallelogrammum GFDE, quod dico eſſe æquale triangulo CBD. Probatur. Ducatur enim recta BF.



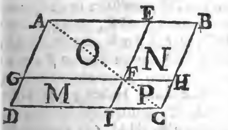
e 41.pri. Quoniam vero parallelogrammum GFDE, (e) duplum eſt trianguli DBF, & triangulum BCD, duplum
f 38.pri. eſt eiuſdem trianguli DBF, (f) quod ſint ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis; Erunt parallelogrammum GFDE, & triangulum BCD, (g) æqua-
g 6. prõ. lia inter ſe. Cum igitur angulus GFD, factus ſit æqualis angulo A, conſtat propoſitum. Quo circa dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

PROPOS. 43. THEOR. 32.

In omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

IN parallelogrammo ABCD, ſint circa diametrum AC, parallelogrammia AEFG, GHFI, & complemen-

plementa GFID, EBHF, vt in 36. definitione diximus. Dico complementa hæc inter ſe eſſe æqualia. Probatur. Cum enim



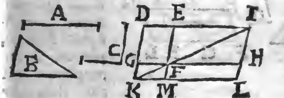
triangula ABC, CDA, (a) æqualia ſint; Itemque triangula AEF, FGA; ſi hæc ab illis demantur, (b) remanebunt trapezia EFCB, GFCD, æqualia: ſunt autem & (c) triangula FIC, FHC, æqualia: quare ſi detrahantur ex trapezijs, (d) remanebunt æqualia complementa EFHB, GFID. In omni igitur parallelogrammo complementa, &c. Quod oſtendendum erat.

a 34. pri.
b 1. prõ.
c 34. pri.
d 3. prõ.

PROPOS. 44. PROBL. 12.

Ad datum rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

DAta recta linea ſit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Conſtituatur triangulo B, (a) æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG,



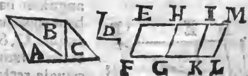
a 42. pri.

angulo C, æqualem, producaturque GF, ad H, vt FH,
b 31.pri. ſit æqualis rectæ A; & per H, (b) ducatur HI, parallela ipſi FE, occurrens ipſi DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens
c 31.pri. rectæ DG, productæ in K; & (c) per K, ducatur KL, parallela ipſi GH, ſecans IH, protractam in L, producaturque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, eſſe id, quod quæritur. Habet enim latus
d 15.pri. FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualem, cum angulus HFM, (d) æqualis ſit angulo EFG, (ſunt enim ad verticem) & angulus EFG, factus eſt æqualis angulo C; Denique paralle-
e 43.pri. logrammum LMFH, æquale eſt triangulo B, (e) cum æquale ſit complemento DEFG, quod factum eſt æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOS. 45. PROBL. 13.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

Q Vamuis Euclides proponat hoc problema abſolutè non aſtringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propoſ. 44. fecerat; tamen quia in ſequentibus frequenter vſurpatur in data recta linea, placuit ipſum proponere vna cum data recta



linea. Sit ergo recta data FF; rectilineum ABC, & datus angulus D. Oportet igitur ad datam rectam EF,

con-

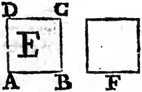
cõſtituere parallelogrammum æquale rectilineo ABC, quod habeat angulũ, æqualem angulo D. Reſolu. rectilineum in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, (a) æquale parallelogrammum conſtituatur EFGH, ſuper rectam EF, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item ſuper rectam HG, parallelogrammum GHIK, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item ſuper rectam IK, parallelogrammum IKLM, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D: & ſic deinceps procedatur ſi plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma conſtructa, quæ quidem æqualia ſunt rectilineo dato ABC, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod ſic demonſtratur. Duo anguli EFG, HGK, (b) inter ſe ſunt æquales, cum vterque ſit æqualis angulo D. Addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, (c) qui duobus rectis æquiualent, (d) æquale duobus angulis HGK, FGH; ideoque hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt: (e) quare FG, GK, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione oſtendemus EH, HI, vnam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG, HIK, æquales inter ſe ſunt, (g) cum ſint æquales oppoſitis angulis æqualibus EFG, HGK, (f) & duo anguli HIK, IHG, duobus ſunt rectis æquales &c. Cum igitur EI, FK, ſint parallelæ, (h) itemque EF, IK; quod vtraque parallela ſit rectæ HG; parallelogrammum erit EFKI. Eodem modo demonſtrabitur parallelogrammum IKLM, adiunctũ parallelogrammo EFKI, conſtituere totum vnum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo ABC, conſtituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

a 44. *pri.*
b 1. *pri.*
c 29. *pri.*
d 2. *pri.*
e 14. *pri.*
g 34. *pri.*
f 29. *pri.*
h 30. *pri.*

PROPOS. 46. PROBL. 14.

A data recta linea quadratum deſcribere.

a 11.pri. SIt data recta AB, ſuper quam oporteat quadratum deſcribere. Ex A, & B, (a) educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, ſintque ipſi AB, æquales, connectanturque recta CD. Dico ABCD, eſſe quadratum. Probatur. Cum enim anguli A, & B, ſint recti, (b) erunt AD, BC, parallelæ: ſunt autem & æquales, quod vtraque ſit æqualis ipſi AB. Igitur (c) & AB, DC, parallelæ ſunt, & æquales: & ideo parallelogrammum eſt ABCD, in quo cum AD, DC, CB, æquales ſint ipſi AB, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: ſunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, (d) æquales ſint oppoſitis rectis A, & B. Quadratum igitur eſt ABCD, ex definitione, ac proinde à data recta linea deſcriptum fuit quadratum. Quod faciendum erat.



b 28.pri.

c 33.pri.

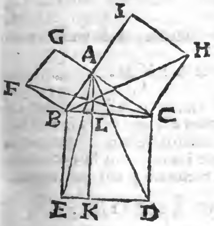
d 34.pri.

PROPOS. 47. THEOR. 33.

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur, quadratis.

a 46.pri. IN triangulo ABC, angulus BAC, ſit rectus (a) deſcribanturque ſuper AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI,

ACHI, BCDE, Dico quadratum BCDE, deſcriptum ſuper latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale eſſe duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ ſuper alia duo latera ſunt deſcripta, ſiue hæc duo latera æqualia ſint, ſiue inęqualia. Probatur. Ducatur enim recta AK, (b) parallela ipſi BE, vel ipſi CD, ſecans BC, in L, & iungātur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, ſunt recti, (c) erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodemque modo IA, & AB, vna linea recta erunt. Rurſus quia anguli ABF, CBE, ſunt æquales, cum ſint recti, ſi addatur communis angulus ABC, (d) fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; ſimiliterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia ſunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrunq; vtrique; vt conſtat ex definitione quadrati: ſunt autem, & anguli ABE, FBC, hiſce lateribus contenti æquales, vt oſtendimus, (e) erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Eſt autem quadratum, ſeu parallelogrammum ABFG, (f) duplum trianguli FBC, cum ſint inter parallelas BF, CG, & ſuper eandem baſin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, eo quod ſint inter parallelas BE, AK, & ſuper eandem baſin BE; Quare æqualia erunt quadratum ABFG, & (g) parallelogrammum BEKL. Eadem ratione oſtendetur, æqualia eſſe quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL; (h) ſunt enim rurſus triangula ACD, HCB, æqualia ideoque eorum dupla, paralle-



b 31. pri.

c 14. pri.

d 2. pri.

e 4. pri.

f 41. pri.

g 6. pri.

h 4. pri.

logrammum videlicet CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. Quamobrẽ totum quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL, æquale eſt duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis &c. Quod erat demonſtrandum.

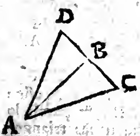
SCHOLIVM.

Quoniam huiuſmodi Theorema vtilitates habet inſignes in Geometria bonum erit non ſolum ipſum bene intelligere, verum etiam diligenter aduertere ea, quæ a P. Clauio circa hoc Theorema in ſuis comentarijs adiunguntur; quia breuitatis gratia omittuntur.

PROPOS. 48. THEOR. 34.

Si quadratum, quod ab vno latere trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur quadratis; angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

DEtur triangulum ABC, ſitque quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC, eſſe rectum. Probatur.
a 11.pri. Ducatur namque BD, (a) perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, connectaturque recta DA. Quoniam igitur, in triangulo ABD, angulus ABD, rectus
b 47.pri. eſt; (b) erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarum BA, BD: Eſt autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearum æqualitatem; quare quadratum rectæ AD, quadratis rectarum BA, BC, æquale erit. Cum



Cum ergo quadratum rectæ AC, eiſdem quadratis rectarum BA, BC, æquale ponatur; (c) erunt quadrata rectarum AD, AC, inter ſe æqualia, ac propterea & rectæ ipſæ AD, AC, æquales. Quoniam igitur latera BA, BD, trianguli ABD, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; & baſis AD, oſtenſa eſt æqualis baſi AC; (d) erunt anguli ABD, ABC, æquales: Eſt autem angulus ABD, rectus ex conſtructione. Igitur & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur &c. Quod demonſtrandum erat.

c 1. pri.

d 8. pri.

TRIANGVLORVM Comparationes.

NOuem modis duo triangula inter ſe comparauit Euclides in hoc libro. Primum, quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, continentque angulum angulo æqualem, (a) colligit æqualitatem baſium, reliquorumq; angulorum, atque adeo totorum triangulorum.

a 4. pri.

Secundò, quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, baſiſque baſi eſt æqualis, (b) infert æqualitatem angulorum illis lateribus comprehenſorum. Vbi alij etiam concludunt æqualitatem reliquorum angulorum totaque triangula probant æqualia.

b 8. pri.

Tertiò, cum duo latera duobus lateribus ſunt æqualia, vtrumque vtrique comprehendunt autem angulos inæquales, (c) oſtendit baſin

c 24. pri.

maiori angulo oppoſitam eſſe maiorem baſe minori angulo oppoſita.

Quartò, cum duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & baſes inæquales, (d) demonſtrauit angulum maiori baſi oppoſitum eſſe maiorem angulo minori baſi oppoſito.

d 25. pri.

Quintò, quando duo anguli duobus angulis æquales ſunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus angulis adiacet, ſiue quod vni æqualium angulorum opponitur, (e) probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius eſſe æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus ſequi etiam, tota triangula eſſe æqualia.

e 26. pri.

Sexto (f) demonſtrauit, duo triangula ſuper eandem baſin, & inter eaſdem parallelas conſtituta, eſſe æqualia.

f 37. pri.

Septimò, (g) oſtendit, duo triangula ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, æqualia eſſe.

g 38. pri.

Octauò (h) docuit, duo triangula æqualia ſuper eandem baſim, & verſus eandem partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas.

h 39. pir.

Nonò tandem (i) probauit, duo triangula æqualia ſuper æquales baſes in eadem linea, in eandemque partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas.

i 40. pri.

Finis Elementi Primi.

EV-

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

I.

OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

IN hoc ſecundo libro agit Euclides de potentijs linearum rectarum, inquirendo quanta ſint, & quadrata partium cuiuſuis lineæ rectæ diuiſæ, & parallelogramma rectangula ſub partibus eiuſdem lineæ diuiſæ comprehenſa, tàm inter ſe, quàm comparatam cum quadrato totius lineę, &c.



Quod vt melius exequatur duas proponit definitiones, quarum prima eſt modo adducta, in qua exponit, ſub quibus rectis lineis contineri dicatur quodcunque parallelogrammum rectangulum: & quid ſit parallelogrammum contineri ſub duabus lineis rectis: Quod totum, vt perfectè intelli-

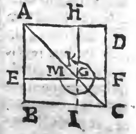
telligatur, aduertendum eſt, parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli ſunt recti. Rurſus parallelogrammum rectangulum contineri ſub duabus rectis lineis, quæ vnum angulum rectum comprehendunt, non importat aliud quam duas huiuſmodi lineas exprimere totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem exprimit longitudinem, alia vero latitudinem. Quod totum patet in parallelogrammo rectangulo ABCD, in quo linea AD, exprimi latitudinem, AB, vero longitudinem: quare ſi multiplicetur vnum latus per aliud, productum, erit totum parallelogrammum.

Demum eſt conſiderandum, Geometras, ne toties eædem lineæ repetantur, ſolere exprimere omnia prorſus parallelogramma duabus dumtaxat litteris quę per diametrum opponuntur; exempli gratia AC, vel BD.

II.

In omni parallelogrammo ſpatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius ſunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon cocetur.

PRo clariori intelligentia, in parallelogrammo ABCD, ducatur diameter AC; & rurſus ex quouis eius puncto G, ducantur rectæ EF, HI, parallelæ lateribus parallelogrammi ita vt parallelogrammum ABCD, diuiſum ſit in 4. parallelogramma, quorum duo EH, IF, dicuntur eſſe circa diametrum, alia vero duo EI, & FH, complementa, vt manifeſtum eſt ex vltima defin.



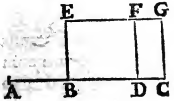
ſin. primi libri. Quo poſito figura compoſita ex vno parallelogrammo circa diametrum, vt I F, vna cum duobus complementis BG, GD, qualis eſt figura EBCDHG, quæ deſignatur circunferentia KLM, dicitur Gnomon.

His poſitis ad propoſ. 1. lib. deueniamus, in quibus perfectè intelligendis operepretium erit multum laboris impendere, non ſolum propter quamplurimos iſtarum vſus in rebus geometricis, tum etiam in humanis comercijs, adeo vt hic liber aureus dici mereatur, cum mole quidem ſit per exiguus, vtilitates vero contineat prope infinitas.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, quarum vna ſecetur in quotcunque ſegmenta; Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis.

Sint duæ rectæ AB, & BC, quarum BC, ſecetur quomodocunque in quotlibet ſegmenta BD, DC. Dico rectangulum ſub AB, & BC; comprehenſum, æquale eſſe omnibus rectangulis ſimul ſumptis, quæ ſub linea indiuiſa AB, & quolibet ſegmento lineæ ſectæ comprehenduntur, nempe rectangulo ſub AB, & BD, atque ſub AB, & DC.



Probatur. Rectangulum enim BG, comprehendatur ſub AB, & BC, hoc eſt recta BE, æqualis ſit rectæ AB. Quod quidem fiet ſi erigantur ad BC, duæ perpendiculares BE, CG, æquales rectæ AB, ducaturque recta

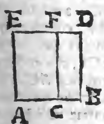
a 28.*pri.* cta EG: Nam rectæ BE, CG, (a) parallelæ erunt ob
b 1. *prō.* rectos angulos B, C: ſed & æquales (b) inter ſe ſunt,
c 33.*pri.* quia vtraque rectæ AB, ponitur æqualis: (c) Igitur erunt quoque EG, BC, parallelæ, & æquales inter ſe: ac proinde rectangulum erit BG, contentum ſub AB, ſiue BE, & BC, ex defin. 1. huius libri. Deinde ex D, (& ex alijs ſectionibus ſi plures fuerint) ducatur recta DF, parallela ipſi BE, vel CG; iamque conſtituta
d 1. *prī.* erunt duo parallelogramma BF, DG, (d) quare etiam
e 34.*pri.* DF, æqualis erit ipſi AB, (e) cum ſit æqualis ipſi BE, cui etiam eſt æqualis ipſa AB, per cōſtructionem. Quoniam igitur recta BE, æqualis eſt rectæ AB, erit rectangulum BF, comprehenſum ſub inſecta linea AB, & ſegmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DG, comprehenſum ſub AB, (oſtenſa enim eſt æqualis ipſi DF,) & ſegmento DC; Quare cum rectangula BF, DG, æqualia ſint toti rectangulo BG, hoc enim eſt totum, & illæ ſunt omnes partes, perſpicuum eſt rectangulum comprehenſum ſub AB, & BC, æquale eſſe omnibus rectangulis, quæ ſub AB, & ſegmentis BD, DC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera, &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Si recta linea ſecta ſit vtcunque: rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

Recta linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas iñ partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, ſimul ſumpta æqualia eſſe

eſſe quadrato totius lineæ AB. Probatur. Deſcribatur enim AD, (a) quadratum lineæ AB, & ex C, (b) ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ (c) æqualis erit rectæ AE, hoc eſt rectæ AB, cui æqualis eſt recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis eſt rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehēſum ſub tota AB, & ſegmento AC: ſimiliter erit rectangulum CD, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento CB; Quare cum rectangula AF, CD, æqualia ſint quadrato AD, perſpicuum eſt, rectangula comprehenſa ſub AB, & ſegmentis AC, CB, æqualia eſſe quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea ſecta ſit vtcunque &c. Quod erat demonſtrandum.

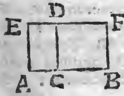


a 46.pri.
b 31.pri.
c 34.pri.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Si recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto ſegmento deſcribitur quadrato.

Linea recta AB, diuiſa ſit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota AB, & vtronis ſegmento, nempe BC, (ſiue hoc ſegmentum maius ſit, ſiue minus) æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis AC, CB, comprehenſo, & quadrato ſegmenti CB, prius aſſumpti. Prob. Conſtituatur enim quadratum dicti ſegmenti BC,



a 31.pri. BC, quod ſit CF; & ex A, educatur AE, (a) parallela ipſi CD, vel BF, donec coeat cum FD, protracta in E. Quoniam igitur recta BF, rectæ BC, æqualis eſt, ex quadrati defin. erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento BC. Rurſus quia recta CD, eadem ratione æqualis eſt rectæ CB; erit rectangulum AD, comprehenſum ſub ſegmentis AC, CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale ſit quadrato CF, & rectangulo AD; liquido conſtat rectangulum ſub AB, tota, & ſegmento BC, comprehenſum, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis AC, CB, & quadrato prædicti ſegmenti BC. Quare ſi recta linea ſecta ſit vtcunque, rectangulum, quod à tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

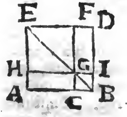
PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si recta linea ſecta ſit vtcunque: quod a tota deſcribitur, quadratum, æquale eſt illis, quæ a ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.

Recta linea AB, diuiſa ſit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, eſſe æquale quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo bis ſub dictis ſegmentis AC, CB. Probatur. Deſcribatur enim ſuper AB (a) quadratum AD, ducaturq; diameter BE. Deinde ex C, ducatur CF, (b) parallela recta BD, ſecans diametrum in puncto G; per quod rurſus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, diuiſum in quatuor parallelogramma. Quoniam

a 46.pri.

b 31.pri.



niam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia ſunt; (c) erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui tres anguli (d) ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis ſunt æquales, & BAE, rectus eſt, cum ſit angulus in quadrato: Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, erunt ſemirecti. Eademque ratione oſtendetur, angulos DBE, DEB, ſemirectos eſſe. Quod etiam conſtat ex ijs, quæ ad 34. propoſ. lib. primi demonſtrauimus. Nam, vt ibi oſtenſum eſt, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres, trianguli EFG, (e) æquales ſunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus eſt, (f) cum ſit æqualis recto D, externus interno: nec non FEG, oſtenſus ſemirectus; erit & reliquus EGF, ſemirectus; ideoq; æqualis angulo FEG. Quare (g) æqualia erunt latera EF, FG, quæ cum ſint (h) æqualia appoſitis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia eius latera ſint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod exiſtente vno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti ſunt, vt ad Corollarium Propoſ. 29. primi libri demonſtrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata ſunt ſegmentorum AC, CB; eo quod latus HG, (i) æquale ſit rectæ AC. Rectangula quoq; AG, GD, comprehenſa erunt ſub ſegmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales ſint rectæ CB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GA, ob quadratum FA, (k) hoc eſt rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale ſit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, GD; conſtat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo ſub ijſdem ſegmentis AC, CB, bis ſumpto. Igitur ſi recta linea ſecuta ſit vtcunque quadratum, quod à tota deſcribitur, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 5. pri.
d 32. pri.
e 32. pri.
f 29. pri.
g 6. pri.
h 34 pri.
i 34. pri.
k 34. pri.

CO-

COROLLARIVM 1.

Ex hac propoſ. fit manifeſtum, parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata.

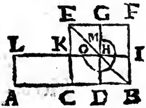
COROLLARIVM 2.

Sequitur etiam ex demonſtratione huius 4. propoſ. diametrum cuiuſuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos AEB, DEB, eſſe ſemirectos. Id quod etiam ad propoſ. 34. lib. 1. demonſtrauimus.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Si recta linea ſecetur in partes æquales, & inæquales; rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vna cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum deſcribitur, æquale eſt ei, quod à dimidia deſcribitur, quadrato.

Diuidatur recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D, ita vt ſectionum inter media ſit recta CD, qua nimirum dimidia CB, ſuperat minus ſegmentum DB, vel qua maius ſegmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus totius AD, DB, comprehenſum, vna cum quadrato inter mediæ CD,



æquale eſſe quadrato dimidiæ CB. Super dimidia CB,

(a) de-

(a) deſcribatur quadratum CF, ductaque diametro BE, ex D, ducatur recta DG, (b) parallela rectæ BF, ſecans diametrum BE, in H, puncto, per quod (c) ducatur recta IK, parallela ipſi BC; item ex A, rectæ C', parallela ducatur AL, ſecans lineam IK, productam in L. Erunt igitur per Corollarium præcedentis Propoſ. DI, KG, quadrata, ideoque DH, recta, æqualis rectæ DB: (d) Eſt autem & KH, ipſi CD, æqualis. Quare rectangulum AH, comprehendetur ſub AD, & DB, & rurſus KG, erit quadratum rectæ CD, cum demonſtrata ſit æqualis ipſi KH. Probandum itaque eſt, rectangulum AH, vna cum quadrato KG, æquale eſſe quadrato CF. Quoniam ergo (e) complementa CH, FH, æqualia ſunt, ſi addatur commune quadratum DI, erit parallelogrammum DF, æquale parallelogrammo CI; eſt aut & AK, (f) eidem CI, æquale, eo quod ſint ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis: Igitur AK, & DF, etiam inter ſe æqualia erunt: quibus ſi commune apponatur CH, erit Gnomon MNO, rectangulo AH, æqualis. Quocirca cum Gnomon MNO, & quadratum KG, æqualia ſint quadrato CF, erit & rectangulum AH, vna cum quadrato KG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergo linea ſecetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod oſtendendum erat.

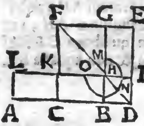
a 46. pri.
b 31 pri.
c 31. pri.
d 34. pri.
e 43. pri.
f 36. pri.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Si recta linea biſariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur. Rectangulum comprehenſum ſub tota, & adiecta, tanquam vna linea, & adiecta, tanquam altera, vna cum quadrato a dimidia deſcripto, æquale eſt quadrato, quod ex dimidia, & adiecta, tanquam vna linea, deſcribitur.

SEcetur recta AB, biſariam in C, & ei in rectum adijciatur BD. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita AD, & adiecta DB, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale eſſe quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB, & adiecta BD, tanquam vna linea componitur. Probatur. Deſcribatur namque CE, (a) quadratum ſuper CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, (b) parallela rectæ DE, ſecans diametrum DF, in H, puncto, per quod punctum rurſus ducatur IK, parallela rectæ CD: Item ex A, rectæ CF, agatur parallela AL, ſecans IK, productam in puncto L. Erunt igitur per Corollarium 1. Propoſ. 4. huius lib. BI, KG, quadrata, ideoque recta DI, rectæ DB, æqualis: (c) eſt autem & KH, rectæ CB, æqualis: quare rectangulum AI, comprehendetur ſub rectis AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque eſt rectangulum AI, vna cum quadrato KG, æquale eſſe quadrato CE, quod taliter demonſtratur. Quoniam

a 46. pri.



b 31. pri.

c 34. pri.

vero

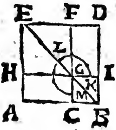
verò parallelogrammum AK, (d) æquale eſt parallelogrammo CH, eo quod ſint ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis: Eſt autem & parallelogrammum HE, (e) eidem CH, æquale, ſunt enim duo complementa; erunt AK, & HE, æqualia inter ſe. Addito ergo communi CI, erit rectangulum AI, Gnomoni MNO, æquale. Quo circa cum Gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, ſint æqualia, partes omnes, & totum; erit & rectangulum AI, vna cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE æquale. Itaque ſi recta linea biſariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur &c. Quod erat oſtendendum.

d 36.pri.
e 43.pri.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Si recta linea vtcunque ſecetur; Quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum vtraque ſimul duo quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

Secetur recta AB, vtrunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum vnius ſegmenti ſiue maioris, ſiue minoris, nempe AC, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub tota AB, & dicto ſegmento AC, vna cum quadrato reliqui ſegmenti CB. Probatur. Deſcribatur enim ſuper AB, (a) quadratum AD, ductaque diametro BE, ex C, (b) ducatur CF, parallela rectæ AE, ſecans diametrum in puncto G,



a 46.pri.
b 31.pri.

 per

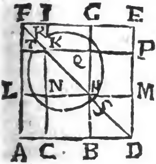
per quod agatur HI, parallela ipſi AB. Erunt igitur per Coroll. 1. Propoſ. 4 huius lib. CI, & HF, quadrata: Et quia recta GH, (c) æqualis eſt rectæ AC, erit HF, quadratum ſegmenti AC. Rurſus quia AE, æqualis eſt ipſi AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehenſum erit ſub eiſdem rectis AB, AC, eo quod rectæ DE, EH, æquales ſint rectis AB, AC, ob quadrata AD, & FH. Quoniam igitur retangulis AF, FI, hoc eſt Gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale eſt quadratum AD, ſcilicet partes omnes, & totum; ſi apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata AD, HF, æqualia quadrato HF, vna cum rectangulis AF, FI, & quadrato CI; ſed quadrato HF, & rectangulis AF, FI, æqualia ſunt duo rectangula AF, HD, (quorum quodlibet, vt viſum eſt, comprehenditur ſub tota AB, & ſegmento AC;) igitur duo quadrata AD, HF, æqualia erunt duobus rectangulis ſub tota AB, & ſegmento AC, comprehenſis, vna cum quadrato reliqui ſegmenti CB. Si ergo recta linea ſecetur vtrunque, &c. Quod erat oſtendendum.

c 34. pri.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Si recta linea ſecetur vtcunque; Rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit quadrato, æquale eſt ei, quod à tota, & dicto ſegmento, tanquam vna linea deſcribitur, quadrato.

Sit recta AB, diuiſa vtcunque in C. Dico rectangulum quater comprehenſum ſub tota AB, & vno ſeg-



ſegmento, nempe CB, vna cum quadrato reliqui ſegmenti AC, æquale eſſe quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto ſegmento CB, componitur. Prob. Producatur enim AB, verſus partem ſegmenti CB, nempe ad *D*, ita vt BD, producta ſit æqualis ſegmento CB; & poſtea ſuper tota AD, (a) deſcribatur quadratum AE. Ducta autem diametro D F, ducantur BG, CI, (b) parallelæ ipſi DE, ſecantes diametrum in punctis A, & K, per quæ ducantur denuo (c) LM, OP, parallelæ ipſi AD, quæ ſecent priores parallelas in N, & Q. Erunt igitur per Coroll. 1. Propoſ. 4. huius libri OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, (d) æqualis eſt rectæ AC, erit OI, quadratum ſegmenti AC. Rurſus quia NH, (e) æqualis eſt rectæ CB, erit NQ. Quadratum ſegmenti CB, ideoq; quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales ſint. Quare rectæ BH, HQ, æquales ſunt ſegmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehenſa erunt ſub tota AB, & ſegmento CB, cum LH, (f) ſit æqualis rectæ AB, ſunt enim latera oppoſita in parallelogrammo. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehenſa ſub AB, & CB, cum NH, HM, rectæ (g) æquales ſint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FI, hac eſt rectæ LH, hoc eſt rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia ſunt; ſi addatur commune KG, erunt BM, KG, ſimul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG; gnomonem RST, componentia æqualia ſunt rectangulo quater comprehenſo ſub tota AB, & ſegmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia ſunt quadrato AE, erit rectangulum quater comprehenſum ſub data recta AB, & ſegmento CB, vna cum quadrato reliqui

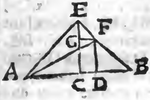
a 46. primi.
b 31. pri.
c 31. pri.
d 34. pri.
e 34. pri.
f 34. pri.
g 34. pri.

liqui ſegmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compoſitæ ex AB, & dicto ſegmento CB. Quare ſi recta linea vtcunque ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius lineæ ſegmentis fiunt ſimul, duplicia ſunt & eius, quod à dimidia, & eius quod ab intermedia ſectionum fit, quadrati.

SEcetur recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata ſegmentorum inæqualium AD, BD, ſimul dupla eſſe quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex inter media ſectionum CD, ſimul.



Prob. Educatur enim ex C, ad AB, (a) perpendicularis CE, quæ ſit æqualis dimidiæ AC, vel CB, ducanturque rectæ EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad AB, perpendicularis DF, ſecans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipſi AB, ſecans CE, in G, puncto, & demum ducatur AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æqualia ſunt per conſtructionem, (b) erunt anguli CAE, CEA, inter ſe æquales: Eſt autem angulus ACE, rectus, cum CE, ſit perpendicularis; reliqui igitur (c) anguli alium rectum conficient; ideoque AEC, ſemirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, erit ſemirectus: ac propterea totus Angulus AEB, ex duobus ſemirectis cōpoſitus, rectus erit. Rurſus, quia triāguli FGE, angulus EGF, æqualis eſt recto ECB, (d) externus interno, & oppoſito: (e) erunt

a 11. pri.
b 5. pri.
c 32. pri.
d 29. pri.

(e) erunt reliqui duo anguli GFE, GEF, vni recto æquales: Oſtenſum autem eſt, angulum GEF, eſſe ſemirectum; igitur & GFE, ſemirectus erit, propterea-que angnli EFG, GEF, æquales erunt, (f) ideoque & latera EG, GF, æqualia inter ſe erunt. Eodem prorſus modo oſtendetur in triangulo BDF, latera BD, DF, æqualia eſſe. Nam angulus BDF, eſt rectus, cum DF, ſit perpendicularis, & B, ſemirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus ſit, (g) erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hæc duo quadrata inter ſe ſunt æqualia, quod & lineæ AC, CE, ſint oſtenſæ æquales. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rurſus quia in triangulo EGF, angulus G, rectus eſt, (h) erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hæc quadrata ſunt inter ſe æqualia ob æqualitatem linearum EG, GF; Igitur quadratum lateris EF, duplum erit quadrati lateris GF, hoc eſt quadrati lineæ CD; Eſt enim recta CD, (i) æqualis rectæ GF; cum CF, ſit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, & EF, dupla erunt quadratorum linearum AC, & CD: ſunt autem duo quadrata rectarum AE, & EF, æqualia (k) quadrato rectæ AF; & quadratum rectæ AF, æquale eſt duobus quadratis rectarum AD, DF; Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla ſunt quadratorum rectarum AC, CD. Atqui quadratum rectæ DF, æquale eſt quadrato rectæ DB; Oſtenſum enim eſt, rectas DF, DB, eſſe æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB, ſegmentorum inæqualium dupla ſunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidiæ ſcilicet lineæ, & intermediæ ſectionum. Si ergo recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod erat demonſtrandum.

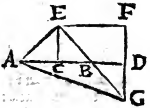
e 32. pri.
f 6. pri.
g 47. pri.
h 47. pri.
i 34. pri.
k 47. pri.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

Si recta linea biſariam ſecetur, & ei in rectum alia quæpiam linea adijciatur: Quod à tota, cum adiuncta tanquam vna linea, & ab adiuncta, vtraque ſimul quadrata, duplicia ſunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod à compoſita ex dimidia, & adiuncta, tanquam ab vna linea, deſcriptum ſit, quadrati.

SEcetur recta AB, biſariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico, duo quadrata rectarum AD, & BD, ſimul, dupla eſſe duorum quadratorum ſimul, quæ ex rectis AC, CD, deſcribuntur. Probatur. Super AB, ex puncto C, (a) erigatur perpendicularis CE, quæ ſit æqualis dimidiæ AC, vel CB, iunganturque rectæ AE, EB. Deinde per D, ducatur DF, ipſi CE, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G, puncto; & per E, rectæ CD, parallela ducatur EF, ſecans DF, in F, puncto, iungaturque recta AG. Oſtendetur iam, angulum AEB, eſſe rectum, vt in præcedenti Propoſ. & CEB, ſemirectum; ideoque (b) eius alternum EGF, quoque ſemirectum: eſt autem angulus F, (c) rectus, cum in parallelogrammo CF, opponatur angulo C, qui factus eſt rectus. Igitur (d) & reliquus FEG, ſemirectus erit, ac propterea ipſi EGF, æqualis. Quare (e) rectæ EF, FG, æqualibus angulis oppoſitæ, inter ſe æquales erunt. Eodem modo oſtendes, rectas BD, DG, eſſe æquales, ex eo quod angulus BDG, ſit rectus, BGD, ſemi-

a 11. pri.



b 29. pri.
c 34. pri.
d 32. pri.
e 6. pri.

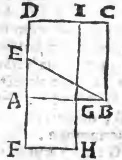
ſemirectus &c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, (f) æquale eſt quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rurſus quia quadratum rectæ EG, (g) eſt æquale duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG; erit quoque quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc eſt rectæ CD, cum CD, (h) recta æqualis ſit rectæ EF. Duo igitur quadrata rectarum AE, EG, dupla ſunt quadratorum ex rectis AC, CD deſcriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum AE, EG, (i) æquale eſt quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ lineæ AG, æqualia ſunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis AD, DG, deſcribuntur (angulus enim D eſt rectus.) Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla ſunt quadratorum ex rectis AC, CD, deſcriptorum. Demum cum quadratum rectæ DG, æquale ſit quadrato rectæ BD, ob linearum æqualitatem, erunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, deſcribuntur. Itaque ſi recta linea ſecetur biſariam &c. Quod demonſtrandum erat.

f 47. pri.
g 47. pri.
h 34. pri.
i 47. pri.

PROPOS. II. PROBL. I.

Datam rectam lineam taliter ſecare, vt rectangulum comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

DAta ſit recta AB, quam ſecare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota, & altero eius ſegmento, nempe minori, æquale ſit quadrato reliqui ſegmenti, nempe maiori. Deſcri-



ſcribatur ex AB, quadratum AC, & diuiſo latere AD quod cum data recta AB, angulum rectum efficit, biſariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis ſumatur EF; & ipſi AF, abſcindatur ex data recta AB, æqualis AG. Quod fieri poteſt cum AB, maior ſit quam AF; nam cum EB, ſit æqualis ipſi EF, ex conſtructione; (a) ſint autem latera AE,

a 20. pri.

AB, maiora latere EB; erunt quoque rectæ EA, & AB, maiores recta EF; ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, maior erit reliqua AF. Dico rectam AB, ſectam eſſe in G, taliter, vt rectangulum ſub AB, & BG, comprehenſum, æquale ſit quadrato rectæ AG; adeo vt AG, ſit maius ſegmentum, & BG, minus. Probatur. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, ſecans CD, in I: ac per F, ducatur FH, ipſi AG, parallela ſecans HI, in H, puncto. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum ſegmenti AG, cum omnia eius quatuor latera ſint æqualia, cum (b) FH, HG, æqualia ſint oppoſitis AG, AF, pariter æqualibus, omneſque anguli eiuſdem recti ob rectum A, vt in Corollario 29. Propoſ. lib. primi habetur. Rectangulum quoque CG, comprehenſum erit ſub AB, & ſegmento BG, quod AB, æqualis ſit ipſi BC. Quare probandum eſt rectangulum CG, & quadratum AH, æqualia eſſe. Quoniam igitur recta DA, eſt ſecta biſariã in E, & ei addita fuit in rectũ AF, (c) erit rectangulum ſub DF, & FA, hoc eſt rectangulum DH, (cum FH, ſit æqualis ipſi FA) vna cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc eſt quadrato rectæ EB, quæ rectæ EF, æqualis eſt per conſtructionem. Eſt autem quadratum rectæ EB, (d) æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum DH, vna cum quadrato rectæ AE, æquale quoque

b 34. pri.

c 6. ſec.

d 47. pri.

que

que erit quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc eſt quadrato AC; Ablato rurſus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter ſe æqualia. Quod fuit propoſitum. Datam igitur rectam AB taliter ſecuimus &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

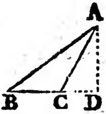
Hoc problema nulla ratione numeris accomodari poteſt, vt monet Clauius in hoc loco, & demonſtrat ad Propoſ. 14. lib. 9. Siquidem numerus nullus poteſt taliter in duos diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis ſit quadrato alterius partis. Quod ſane non accidit in 10. antecedentibus theorematibus, quæ lib. 9. in numeris clarius demonſtrantur.

PROPOS. 12. THEOR. 11.

In amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod cum protractum fuerit cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exterius linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.

Triangulum ABC, habeat angulum ACB, obtuſum, & ex A, in latus BC, ad partes anguli obtuſi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadra-

dratum lateris A B, quod obtuſo angulo opponitur, maius eſſe quadratis laterum AC, CB, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, & CD, hoc eſt quadratum lateris AB, æquale eſſe duobus quadratis laterũ AC, CB, vna cum rectangulo bis ſub BC, CD, comprehenſo. Probatur. Cum enim recta BD, vtcunque diuiſa ſit in C, (a) erit quadratum rectæ B D, æquale duobus quadratis rectarum BC, & CD, & rectangulo bis ſub BC, CD, comprehenſo. Addito igitur communi quadrato rectæ AD; erunt duo quadrata rectarum BD, & DA, æqualia tribus quadratis rectarum BC, CD, DA, & rectangulo bis ſub BC, CD comprehenſo: Eſt autem quadratis rectarum BD, DA, (b) æquale quadratum rectæ AB. Quare & quadratum rectæ AB, æquale erit tribus quadratis rectarum BC, CD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub BC, CD. Cum igitur quadratis rectarum C D, DA, (c) æquale ſit quadratum rectæ AC; erit quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum BC, CA, & rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD. Quod eſt propoſitum. In Amblygonijs ergo triangulis quadratum &c. Quod erat oſtendendum.



a 4. ſec.

b 47. pri.

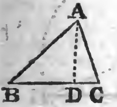
c 47. pri.

PRO-

PROPOS. 13. THEOR. 12.

In Oxygonijs triangulis, quadratum factum à latere angulum acutum ſubtendente minus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus angulum acutum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope angulum acutum.

IN triangulo ABC, omnes anguli ſint acuti, & ex A, demiſſa perpendicularis, AD, cadat in latus BC. Dico quadratum lateris AB, quod acuto angulo C, opponitur, minus eſſe quadratis laterum AC, CB, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, hoc eſt quadratum lateris AB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, æquale eſſe duobus quadratis laterum AC, CB. Prob. Cum enim



recta BC, diuiſa ſit vtcunque in D, erunt quadrata rectarum BC, CD, (a) æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, & quadrato rectæ BD. Addito ergo communi quadrato rectæ DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Duobus autem quadratis rectarum CD, & DA, (b) æquale eſt quadratum rectæ CA. Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cum ergo duobus quadra-

a 7. ſec.

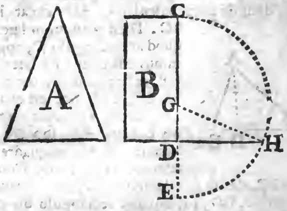
b 47. pri.

c 47.pri. dratis rectarum BD, DA, (c) æquale ſit quadratum rectæ AB; erunt duo quadrata rectarum BC, CA, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD & quadrato rectæ AB, quod eſt propoſitum. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 14. PROBL. 2.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

SIt datum rectilineum A, cui quadratum æquale conſtituendum eſt. Conſtituatur parallelogram-



a 45.pri. mum B, (a) æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt CD, producatur ad E; ſitque DE, recta æqualis rectæ DF. Diuidatur quoque CE, bifariam in G, puncto, quod cadet aut in punctum D, aut non: ſi cadit in punctum D, erit recta DF, (cum æqualis ponatur rectæ DE) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum B, erit quadratum, cum

b 34.pri. alia duo latera oppoſita (b) æqualia ſint lateribus æqualibus DC, DF, & vnus angulus per conſtructionem

nem ſit rectus, & conſequenter omnes recti per Corrol. prop.29.lib. 1. Atque adeo conſtitutum eſt quadratum æquale rectilineo A, quod erat faciendum. Si vero punctum G, non cadit in D, facto G, centro interuallo GC, deſcribatur ſemicirculus CHE; producaturque FD, donec circumferentiam ſecet in H. Dico igitur quadratum rectæ DH, eſſe æquale rectilineo A. Probatur. Ducta enim recta GH, quia recta CE, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in D; erit rectangulum comprehenſum ſub CD, DE, hoc eſt rectangulum B, vna cum quadrato rectæ GD,(c) æquale quadrato rectæ GE; hoc eſt quadrato rectæ GH; cum GH, & GE, ſint æquales, ſunt enim à centro ad circumferentiam. Sed quadratum rectæ GH,(d) æquale eſt quadratis rectarum GD, DH. Quamobrem dempto communi quadrato rectæ GD, remanebit rectangulum B, hoc eſt rectilineum A, quadrato rectæ DH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum conſtituimus. Quod facere oportebat.

c 5. ſec.

d 47. pri.

Finis Elementi ſecundi.

Digitized by Google

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

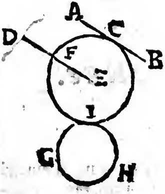
I.

ÆQuales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales; vel quorum, quæ ex centris ad periferias ducuntur rectæ lineæ, ſunt æquales.

EVclides in hoc 3. libro varias circuli proprietates demonſtrat, exponendo prius quoſdam terminos, ad meliorem dicendorum intelligentiam. Primo enim loco docet, eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, vel ſemidiametri ſunt æquales. Nam cum circulus, ex iam dictis, deſcribatur ex circumuolutione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile perſpicuum eſt, eos circulos eſſe æquales, quorum ſemidiametri æquales ſunt.

II.

Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, ſi producatur circulum non ſecat.



VT eſt linea AB, quæ tangit circulum in C, nec ipſum ſecat vti facit DE, quæ circulum ſecat in F, puncto. Vnde AB, dicitur tangens, DE, vero ſecans.

III.

Circuli ſeſe mutuo tangere dicuntur, qui ſeſe mutuo tangentes, ſeſe mutuo non ſecant.

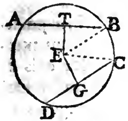
QVod patet in duobus circulis CFI, GIH, qui ſeſe mutuo tangunt in puncto I.

IV.

IV.

In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Longius autem abeſſe illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

EVclides in hac definitione æqualem diſtantiam rectarum in circulo deſignauit per æquales perpendiculares, ſicuti inæqualem per inæquales. Vt duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD, dicuntur æqualiter diſtare à centro E, ſi perpendiculares ET, EG, æquales fuerint, ſi vero perpendiculares non fuerint æquales illa linea, in quam cadit maior perpendicularis, dicitur longius diſtare à centro, quam illa, in quam cadit minor perpendicularis.



V.

Segmentum circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli periferia comprehenditur.

VT ſunt figuræ A, & B, quæ figuræ vt patet comprehenduntur ſub vna recta linea, & circuli portione.



VI.

Segmenti autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli periferia comprehenditur.

Hic pro angulo ſegmenti intelligit Euclides angulum mixtum contentum ſub recta linea, & circuli periferia.

VII.

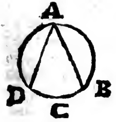
In ſegmento autem angulus eſt, cum in ſegmenti periferia ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ; Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.

Sit ſegmentum circuli quodcunque verbi gratia C, in cuius periferia ſumatur quodcunque punctum nempe C, à quo ad extrimitates rectæ lineæ ducantur duæ rectæ, iam angulus ab illis duabus rectis lineis comprehenſus, vocatur angulus in ſegmento.

VIII.

Cum vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt periferiam, illi angulus inſiſtere dicitur.

Si enim in periferia alicuius circuli ADCB, ſumatur quodcunque punctum, nempe A, ducantur duæ

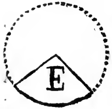


duæ rectæ AB, AD, vſque ad periferiam D, B, angulus rectilineus DAB, inſiſtere dicitur circumferentiæ DCB, qui anguluſ ſola voce differt à præcedenti.

IX.

Sector autem circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à periferia ab illis aſſumpta.

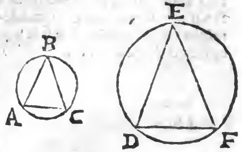
IN circulo E, & pariter ab eius centro E, duæ lineæ à centro ad circumferentiam ductæ conſtituant angulum rectilineum, in hoc caſu figura E, contenta ſub duabus rectis à centro ad circumferentiam ductis, & ab illa portione circumferentiæ, quæ à dictis lineis rectis aſſumitur, vocabitur ſector circuli, quia ſecat portionem circuli.



X.

Similia circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli ſunt æquales.

SInt duo circulorum ſegmenta ABC, DEF, quæ capiant angulos æquales ABC, DEF, (quamuis huiuſ-



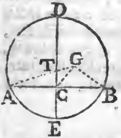
iuſmodi ſegmenta ſint inæqualium circulorum) à Geometris dicuntur ſimilia, vel etiam quando in ſe retinent angulos æquales.

PROPOS. I. PROBL. I.

Dati circuli centrum reperire.

SIt datus circulus ADBE, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in dato circulo linea vtcunque

a 10.pri. AB, (a) quæ biſariam diuidatur in C, & per C, ad AB, perpendicularis ducatur DE, vtrinque in periferiæ punctis D, E, terminata. Hac igitur biſariam ſecta in T; dico T, eſſe centrum circuli propoſiti. Prob. In ipſa enim recta DE, aliud punctum, præter T, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipſam DE, diuidat inæqualiter, nam ſolum



in T, diuiſa fuit æqualiter. Si igitur T, non eſt centrum ſit punctum G, extra rectam DE, à quo ducantur lineæ GA, GC, GB. Quoniam ergo latera AC, CG, trianguli ACG, æqualia ſunt lateribus BC, CG, trianguli BCG, & baſis AG, baſi GB, (ſunt

b 8.pri. enim à centro ad circumferentiam) (b) erunt anguli ACG, BCG, æquales ideoque recti: erat autem & angulus ACT, rectus ex conſtructione. Igitur duo angu-

anguli recti ACT, ACG, æquales erunt, pars, & totum quod eſt abſurdum. Non eſt ergo punctum G, centrum; eademque ratio erit de omni alio, præter quam de ipſo T; Quare dati circuli centrum reperimus. Quod erat efficiendum.

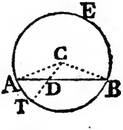
COROLLARIVM.

Ex hac Propoſ. manifeſtum eſt, quod ſi in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam pariter in circulo ductam ſecet bifariam, & ad angulos rectos, in ſecante eſſe centrum circuli. Nam ex eo quod DE, recta rectam AB, bifariam ſecet in C, & ad angulos rectos, oſtenſum fuit, punctum eius medium T, neceſſario eſſe circuli centrum.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Si in circuli periferia duo quælibet puncta fuerint accepta; recta linea, quæ ad ipſa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

IN circulo AEB, ſumantur quælibet duo puncta A, & B, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in B, ductam cadere intra circulum, itaut ipſum ſecet. Probatur. Ducta recta linea AB, in ipſa aſſignetur quodcunque punctum nempe D, deinde (a) inueniatur centrum dati circuli, & ſit C, à quo ducantur rectæ CA, CDT, & CB. Quoniam igitur in triangulo ABC, duo latera AC, CB, ſunt æqualia, (ſunt enim à centro ad circumferentiam) angulus CAB, (b) æqualis erit angulo CBA; cum vero angulus CDB, (c) maior ſit inter-



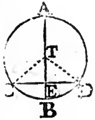
a 1. ter.
b 5. pri.
c 16. pri.

d 1. ax. terno, & oppoſito CAD, (d) maior quoque erit angulo CBD. Quia ergo in triangulo CDB angulus
e 19. pri. D, oſtenſus eſt maior angulo B, (e) etiam latus CB, maius erit latere CD; ſed recta CB, æqualis eſt rectæ CT, ob defin. circuli; ergo recta CT, maior erit recta CD; quare cum CT, tota ſit in circulo comprehenſa, punctum D, erit intra circulum. Eodemque prorſus modo demonſtrabitur reliqua puncta rectæ AB intra circulum reperiri; quapropter etiam linea recta AB, ab huiuſmodi punctis conſtituta intra circulum erit. Quare ſi in circuli periferia duo quelibet puncta, &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. 3. THEOR. 2.

Si in circulo recta quædam linea per centrum ducta quandam aliam non per centrum extenſam bifariam ſecet; & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit.

PEr centrum T, circuli ACBD, recta AB, extenſa diuidat rectam CD, non per centrum ductam, bifariam in E. Dico rectam AB, eſſe ad angulos rectos ipſi CD. Prob. Ductis enim rectis TC, TD, erunt duo latera TE, EC, duobus lateribus TE, ED, æqualia; & baſes TC, TD,
a 8. pri. æquales. (a) Igitur anguli TEC, TED, æquales erunt, hoc eſt recti. Quod primo erat propoſitum.



Sit iam AB, ad angulos rectos ipſi CD, dico rectam CD, bifariam ſecari in E, à recta AB. Prob. Ductis enim iterum rectis TC, TD; cum latera TC, TD, trianguli TCD,
b 5. pri. ſint æqualia, (b) erunt anguli TCD, TDC, æquales.
Quo-

Quoniam igitur duo anguli TEC, TCE, trianguli TCE, æquales ſunt duobus angulis TED, TDE, trianguli TDE, & latera TC, TD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: (c) Erunt latera EC, ED; æqualia. Quod ſecundò proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum ducta, &c. Quod demonſtrandum erat. c 26. pri.

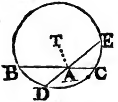
COROLLARIUM.

Ex hac demonſtratione facile inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, lineam, quæ baſim bifariam ſecat, perpendicularem eſſe ad baſim; Et è contra, lineam, quæ ad baſim eſt perpendicularis, baſim ſecare bifariam: vt patet in triangulo TCD.

PROPOS. 4. THEOR. 3.

Si in circulo duę rectæ lineę non per centrum extenſæ ſeſe mutuo ſecent: ſeſe mutuo bifariam non ſecabunt.

DVæ rectæ BC, DE, ſe mutuo in A, ſecent in circulo BDCE, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt ſeſe mutuo bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: ſi vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diuiſa enim ſit tam BC, quam DE, bifariam in

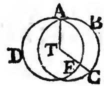


a 1. ter. in A, ſi fieri po eſt. (a) Inuento igitur centro circuli, nempe T, ab eo ad A, ducatur recta TA. Quoniam ergo recta TA, ponitur ſecare rectam BC, biſariam
b 3. ter. in A, (b) ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur DE, ad angulos rectos, cum etiam ipſa ponatur biſariam diuiſa in A. Quare rectus angulus TAB, recto angulo TAD, æqualis erit, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ non per centrum extenſæ, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROP. 5. THEOR. 4.

Si duo circuli ſeſe mutuo ſecent; non erit illorum idem centrum.

DVo circuli ABC, ADE, ſe mutuo ſecent in A, & E. Dico ipſos non habere idem centrum. Prob. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque T, à quo duæ rectæ ducantur: TA, quidem ad punctum ſectionis A; TC, vero ſecans vtramque circumferentiam in E, & C. Quoniam igitur T, ponitur centrum circuli ABC, erit recta TC, rectæ TA, æqualis. Rurſus quia T, centrum quoque ponitur circuli ADE, erit & recta TE, eidem rectæ, TA, æqualis. Quare rectæ TC,



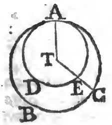
a 1. pri. TE, (a) æquales inter ſe erunt, pars, & totum quod eſt impoſſibile. Si igitur duo circuli ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.

PRO-

PROPOS. 6. THEOR. 5.

Si duo circuli ſeſe mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

Dvo circuli ABC, ADE, ad inuicem ſe interius tangant in A. Dico eos non habere idem centrum. Probatur. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum T, à quo duæ rectæ ducantur, TA, quidem ad contactū circulorum A; At TC, ſecans vtramque circumferentiam in E, & C. Quoniam igitur T, ponitur centrum circuli maioris ABC; erit recta TC, rectæ TA, æqualis. Rurſus quia T, ponitur centrum circuli minoris ADE, erit recta TE, eidem rectæ TA, æqualis. Quare rectæ TC, TE, (a) inter ſe æquales erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuo interius tangant &c. Quod erat demonſtrandũ.

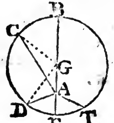


a 1. prĩ.

PROPOS. 7. THEOR. 6.

Si in diametro circuli quod piam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum cadant quædam rectæ lineæ: Maxima earum illa erit, in qua centrum reperitur, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ducitur ſemper maior eſt: ſolum autem duæ rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraque partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro BE, circuli BCDET, cuius centrum G, punctum aſſumatur quodcunque A, præter centrum, & ex A, cadant in circulum quotcunque lineæ AD, AC. Dico omnium, quæ ex A, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe AB, in qua eſt centrum, minimam vero reliquam AE, quæ diametrum perficit: Deinde rectam AC, quæ rectæ AB, per centrum ductæ propinquior eſt, maiorem eſſe recta AD, quæ ab eadem AB, plus diſtat; atque ita de alijs ſi ducantur in infinitum. Demum ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ AE, vel maximæ AB, tantummodo duci poſſe duas lineas inter ſe æquales. Ducantur ex centro G, ad puncta C, & D, duæ rectæ GC, GD.



a 20. pri. Quoniam igitur duo latera AG, GC, (a) maiora ſunt reliquo AC, in triangulo AGC, ſunt autem duæ rectæ

& æ AG, GC, duabus rectis AG, GB, æquales, hoc eſt toti rectæ AB, quia GC, GB, ſunt ab eadem centro; erit & AB, maior quam AC; eademque ratione recta AB, maior erit recta AD, & ſic de reliquis. Quare AB, maxima eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt.

Deinde quoniam in triangulo DGA, latus DG, (b) minus eſt duobus lateribus GA, AD. Eſt autem GD, ipſi GE, æqualis; erit & GE, minor quam GA, & AD. Quare dempta communi GA, remanebit adhuc AE, minor quam AD. Vnde AE, minima eſt omnium, quæ ex A, in circuli circumferentiam cadunt. b 20. pri.

Rurſus quia duo latera AG, GC, in triangulo AGC, æqualia ſunt duobus lateribus AG, GD, in triangulo AGD, & angulus totus AGC, maior eſt ſua parte AGD, (c) erit baſis AC, maior baſi AD, & ſic de reliquis, ſi ductæ fuerint. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt remotiore. c 24. pri.

Tandem lineæ AD, ex altera parte æqualis ponatur AT, quod facile erit, ſi ad centrum G, verſus alteram partem ponatur vnus angulus æqualis angulo AGD, vt docet Propoſ. 23. lib. primi, qui angulus intelligatur comprehenſus ſub AG, & alia ex G, in T, ducta, vnde ſi poſtea coniungantur puncta A, & T, per rectam AT, erit AT, æqualis ipſi AD, quia ſunt duo triangula, quæ habent conditiones 4. Propoſ. primi libri, vnde baſis AD, baſi AT, æqualis erit. Quod autē nulla alia his duabus AD, AT, poſſit eſſe æqualis conſtat. Nam ſi ex A, ducatur alia, quæ cadat ſupra punctum T, iuxta demonſtrata erit maior quam AT, ſi cadat infra, erit minor, vnde nunquam poterit eſſe æqualis ipſi AD. Duæ igitur dumtaxat rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ AE, vel maximæ AB, cadunt. Itaque ſi in diametro circuli quod piam ſumatur punctum &c. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOS. 8. THEOR. 7.

Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, à quo ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vtlibet: In cauam periferiam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur, aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt; In conuexam vero periferiam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper maior eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo pūcto in ipſum circulum cadunt ad vtraſq; partes minimæ, vel maximæ.

Sit datum punctum A, extra circulum EDBLH, cuius centrum G, lineæ ſecantes circulum ducantur à puncto A, quarum AB, per centrum tranſeat, reliquæ vero AC, AD, vtcunque. Dico omnium maximam eſſe A B, quæ per centrum tranſit: Deinde rectam A C, quæ rectæ A B per centrum ductæ, propinquior exiſtit, maiorem quoque eſſe recta AD, quæ remotior eſt ab eadem AB, & ſic de reliquis, ſi extarent. E contrario autem rectam AI, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam AF, quæ vicinior eſt mini-



mæ

mæ AI, minorem eſſe recta AE, remotiore. Denique ex A, ad vtraſque partes maximæ ſineæ AB, vel minimæ AI, duci poſſe tantummodo duos lineas rectas inter ſe æquales. Probatur. Ducantur ex centro G, ad puncta C,D,E,F, rectæ GC, GD, GE, GF. Quoniam igitur duo latera AG, GC, trianguli AGC, (a) maiora ſunt recta AC; ſunt autem rectæ AG, GC, æquales rectis AG, GB, hoc eſt toti rectæ AB; erit & AB, maior quam AC. Eadem ratione erit AB, maior quam AD, &c. Quare AB, eſt omnium, quæ ex A, in cauam periferiam cadunt, maxima, quod primo fuit propoſitum. a 20. pri.

Deinde, quoniam latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia ſunt lateribus, AG, GD, trianguli AGD; & totus angulus AGC, maior eſt angulo AGD; (b) erit baſis AC, baſe AD, maior. Eademque ratione de reliquis erit dicendum. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt remotiore. b 24. pri.

Rurſus, quia in triangulo AFG, recta AG, minor eſt (c) duabus AF, FG; ſi æquales auferantur FG, IG, remanebit adhuc AF, maior quam AI. Simili prorſus ratione erit AE, maior quam AF, &c. Quare AI, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima eſt. c 20. pri.

Rurſus, cum intra triangulum AEG, cadant duæ rectæ AF, FG, ab extremitatibus lateris AG, ductæ; (d) erunt AF, FG, minores ipſis AE, EG; ablatis igitur æqualibus GE, & GF, remanebit adhuc AE, maior quam AF. Quare linea propinquior minimæ lineæ AI, minor eſt, quam remotior ab eadem. d 21. pri.

Demum ducatur AL, æqualis ipſi AC, & AH, ipſi AF, quo poſito. Dico hanc ſolam duci poſſe æqualem ipſi AC. Prob. Si alia præter AL, poteſt duci æqualis ipſi AC, neceſſario ducenda erit ſupra, vel infra AL; ſi ducatur ſupra, iuxta ſuperius demonſtrata, erit minor ipſa AL; ſi vero ducatur ſupra, erit maior; quare nulla præter AL, ipſi AC, æqualis erit. Quoquo modo etiam probandum erit, nullam præter AH, duci

duci poſſe æqualem ipſi AF, nam etiam iſta, ducenda erit intra, vel extra AH; ſi ducatur intra minor erit ipſa AH, ex modo viſis; ſi ducatur extra erit maior; quare nunquam poterit æqualitatem habere cum ipſa AF. Duæ igitur ſolum rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur aliquod punctum, à quo ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 9. THEOR. 8.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

IN circulo BCD, à puncto aſſumpto A, cadant plures, quam duæ rectæ AB, AC, AD, inter ſe æquales. Dico punctum A, eſſe centrum circuli BCD. Prob. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD, (a) quibus bifariam diuiſis in E, & F, ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia ſunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & baſes AB, AC, ponuntur etiam æquales; (b) erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo oſtendemus, angulos ad F eſſe rectos. Quare cum rectæ AE, AF, diuidant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, tranſibit vtraque producta per centrum circuli, iuxta Coroll. Propoſ. 1. huius libri. Punctum igitur A, in quo ſe mutuo ſecant, centrum erit circuli. Si enim aliud punctum eſſet centrum, non tranſiret vtraque per centrum. Si itaque



a 10. pri.

b 8. pri.

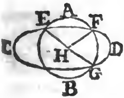
quę in circulo acceptum fuerit punctum &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 10. THEOR. 9.

Circulus circulum in pluribus, quam duobus, punctis non ſecat.

SEcent ſe, ſi fieri poteſt, duo circuli ECGD, FAEBG, in tribus punctis E, F, G, (a) inuentum autem ſit H, centrum circuli AFGBE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ HE, HF, HG, quæ per circuli definitionem æquales inter ſe erunt. Quoniam igitur intra circulum A E B G F, aſſumptum eſt punctum H, à quo cadunt in circumferentiam plures quam duæ rectæ lineæ, æquales; (b) erit H centrum circuli AEBGF; Eſt autem idem punctum H, ob eandem rationem centrum circuli EFDGC; Duo ergo circuli ſe mutuo ſecantes habent idem centrum. (c) Quod eſt abſurdum.

a 1. ter.
b 9. ter.
c 5. ter.



PROPOS. 11. THEOR. 10.

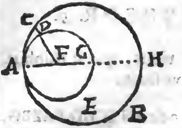
Si duo circuli ſeſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra: ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta in contactum circulorum cadet.

TAngat circulus ABC, circulum ADE, intus in A; ſitque G, centrum circuli ABC, & F, centrum pariter circuli ADE, quod neceſſario à priori

 diuer-

diuerſum erit, cum duo circuli ſeſe interius tangentes, (a) non poſſint idem centrum habere. Dico lineam extenſam per G. & F, ad ſolum contactum A, eſſe rectam. Probatur. Si enim linea GF, producta ad contactum A, non eſt recta, ad aliud punctum, ſi fieri poteſt, nempe ad C, ducatur FC, quæ ſimul cum GF conſtituat rectã GFC. Quoniam igitur in circulo ABC, aſſumptum eſt punctum F, quod non eſt centrum, (b) erit recta FC, reſiduum illius, quæ per centrum tranſit, omnium minima: maior igitur erit FA, ipſa FC; ſed FA, per circuli definitionem, eſt æqualis ipſi FD; quare FD, maior erit ipſa FC, quod eſt abſurdum, nam FD, eſt vna pars, & FC, totum. Non igitur GF, ſimul cum FC, facit vnam lineam rectam; at ſolum FA. Quapropter ſi duo circuli ſeſe intus contingant. Quod erat demonſtrandum.

a 6. ter.

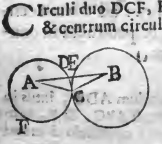


b 7. ter.

PROPOS. 12. THEOR. 11.

Si duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum iungitur, per contactum tranſibit.

Circuli duo DCF, ECG, tangant ſe exterius in C; & centrum circuli DCF, ſit A, circuli vero ECG, ſit B. Dico rectam extenſam per A, & B, tranſire per contactum C. Probatur. Si enim non tranſit ſecet circumferentias in D, & E, ducanturque ex centris A, &

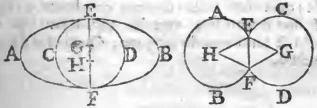


A,& B, ad contactum duæ rectæ lineæ AC, BC. Quoniam igitur in triangulo ACB, duo latera CA, CB, (a) maiora ſunt latere AB: Eſt autem recta AC, rectæ AD, æqualis (ex eo quod A, ponatur centrum circuli DCF,) & recta BC, ob eandem rationem, æqualis rectæ BF; Quare duæ rectæ AD, BE, erunt maiores recta AB, aliquæ partes maiores toto, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe exterius contingant &c. Quod erat demonſtrandum. a 20.pri.

PROPOS. 13. THEOR. 12.

Circulus non tangit circulum in pluribus punctis, quam vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

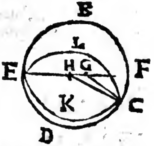
Tangant ſeſe circuli AEBF, CEDF, intus, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis quam vno E, & F.



Aſſumantur autem centra horum circulorum G, H, (a) quæ diuerſa erunt; per quæ recta GH, ſi in vtramque partem extendatur, (b) neceſſe eſt cadere in contactus E, & F. Itaque cum G, ſit centrum, & recta EGHF, diameter, diuidetur EGHF, biſariam in G. Similiter diuidetur eadem EF, biſariam in H, quod eſt abſurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto biſariam diuiditur. a 6.ter. b 11.ter.

 Quod

Quod ſi quis dicat, rectam G H, extenſam ad partes quidem H, cadere in contactum G; at vero ad partes G, minime pertinere ad contactum C, ſed ſecare vtrumque circulum (vt in ſecunda figura.) Reſpondeo, & dico hoc recte affirmari non poſſe, cum demonſtratio antecedentis Propoſ. ſit vniuerſalis, & vtrique contactui conueniat; vnde GH, protracta debet cadere in vtrunque contactum, non autem ſecare ambos circulos.

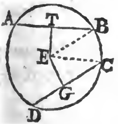


Rurſus tangant ſe circuli AEFB, CEFD, exterius in pluribus punctis quam in vno, nempe in tota circunferentia intercepta inter E, & F. Iuxta primam Propoſ. huius libri inueniantur centra H, G, (a) quibus ad puncta E, & F, ducantur rectæ HE, HF, GE, GF. Iam linea H E G coniungens centra H, G, &
c 12. ter. tranſiens per contactum E, (c) recta erit; qua pariter ratione etiam H F G, recta erit, quod eſt impoſſibile, quia duæ rectæ ſpatium clauderent. Quare ſi duo circuli ſeſe exterius contingant in vno puncto ſe tantummodo tangunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 14. THEOR. 13.

Si circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.

SInt in circulo ABCD, cuius centrum E, duæ rectæ AB, CD, æquales. Dico ipſas à centro E, æqualiter diſtare. Prob. Ducantur ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EG, ET, & coniungantur rectæ EB, EC. (a) Secabunt rectæ ET, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & earum dimidia, videlicet BT, CG, inter ſe æqualia. Quoniam igitur quadrata EB, & EC, ob laterum æqualitatem, ſunt inter ſe æqualia: quadratum autem EB, (b) eſt æquale duobus quadratis BT, TE; erunt & duo quadrata BT, TE, æqualia quadrato EC; ſed eidem quadrato EC, (c) æqualia ſunt duo quadrata CG, GE: quare iuxta primum pronunciatum duo quadrata BT, TE, erunt æqualia duobus quadratis CG, GE. Ablatis igitur æqualibus quadratis rectarum æqualium BT, CG, remanebunt quadrata rectarum ET, EG, æqualia, ideoque & rectæ ET, & EG, æquales erunt. Diſtant igitur iuxta 4. defin. huius libri rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.



a 2. ter.

b 47. pri.

c 47. pri.

Denuo diſtent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter ſe æquales eſſe. Prob. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares ET, EG, quæ per 4. def. huius lib. æquales erunt; diuidentque rectas AB, CD, (d) bifariam. Ductis igitur rectis EB, EC, erunt earum quadrata æqualia. Eſt autem

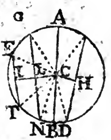
d 2. ter.

e 47.pri. autem quadratum rectæ EB, (e) æquale quadratis rectarum BT, TE, & quadratum rectæ EC, æquale quadratis rectarum CG, GE. Igitur & quadrata rectarum BT, TE, æqualia ſunt quadratis rectarum CG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum ET, EG, remanebunt quadrata rectarum BT, CG, æqualia; atque adeo rectæ BT, CG; ac propterea earum duplæ AB, DC, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 15. THEOR. 14.

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior eſt.

IN circulo AETNBD, cuius centrum C, diameter ſit AB, & recta ei propinquior DF, remotior autem TE. Dico omnium maximam eſſe AB & DF, maiorem quam TE. Prob. Ducantur enim ex C, centro rectæ CH, CI, perpendiculares ad DH, TE. Et quia à centro C, remotior eſt TE quam DF, erit CI, maior quam CH, per 4. def. huius lib. Abſcindatur ex CI, recta CL, æqualis rectæ CH, atque per L, ducatur NG, perpendicularis ad CI, connectanturque rectæ CE, CT, CN, CG. Quoniam igitur perpendiculares rectæ CH, CL, æquales ſunt, æqualiter diſtabunt rectæ NG, DF, à centro, per 4. defin. huius



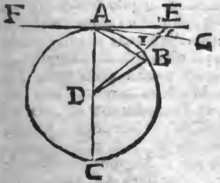
a 14.ter. lib. (a) & ideo inter ſe æquales erunt. Rurſus quia re-
b 20.pri. ctæ CG, CN, (b) maiores quidem ſunt recta NG, & ſunt æquales diametro AB, erit diameter AB, maior quam

quam NG. Eademque ratione erit AB, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera CG, CN, trianguli GCN, æqualia ſunt lateribus CE, CT, trianguli ECT: & angulus NCG, maior angulo TCE. (c) erit recta NG, maior recta TE. Atque adeo DF, quæ oſtenſa fuit æqualis ipſi NG, maior quoque erit quam TE. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat oſtendendum. c 24. pri.

PROPOS. 16. THEOR. 15.

Quę ab extremitate diametri cuiuſcũq; circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ſpſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum altera recta linea non cadet; & ſemicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter ſit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem neceſſario extra circulum cadere.



dirob. Si enim capt intra ipſum, qualis eſt AB; ducta DB; (a) erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, ſed DAB, rectus a 5. pri. eſt per conſtructionem: igitur & DBA, rectus erit, quod eſt abſurdum; nam duo anguli in triangulo (b) b 17. pri. ſunt

ſunt ſemper minores duobus rectis. Non igitur eadē perpendicularis intra circulū cadet, neque eandem ob cauſam in ipſam circumferentiam, ſed extra qualis eſt EF. Dico rurſus ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam AB; non poſſe cadere alteram rectam. Prob. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, ſecans circumferentiam in I, quæ neceſſario ad partes anguli acuti D A G, cadet, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo D A H, duo anguli DHA, DAH, (c) minores ſunt duobus rectis; & DHA, rectus eſt per conſtructionem, erit angulus DAH, recto minor: ideoque recta DA, hac eſt, recta illi æqualis DI, (d) maior erit quam DH, pars maior toto, quod eſt abſurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB, ſed quæcumque ex A, infra AE, ducatur, & circulum ſecabit. Dico denique Angulum ſemicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorem eſſe omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem eſſe omni acuto angulo rectilineo. Prob. Quoniam enim oſtenſum eſt, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet neceſſario ea linea cum AC, angulum rectilineum acutum minorem angulo ſemicirculi, at vero cum AE, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ; cum ille ſit pars anguli ſemicirculi, hic vero totum quid piam reſpectu, anguli contingentiæ. Id quod liquido conſtat ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB; intra circulum cadat, vt demonſtratum eſt, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo ſemicirculi contento ſub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille huius ſit pars: Angulus vero contingentiæ contentus ſub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto B A E, eo quod ille huius pars ſit. Eademque ratio eſt de omnibus

c 17. pri.

d 19. pri.

bus

bus alijs angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, ſub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt oſtenſum fuit. Angulus igitur ſemicirculi maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ minor. Quare quæ ab extremitate diametri cuiuſcunque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

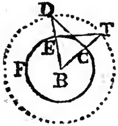
Hinc manifeſtum eſt, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipſum circulum tangere. Oſtenſum enim eſt ipſam cadere extra circulum. Quare ſolum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

Quapropter ſi iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem FAE; quæ circulum tanget in A, vt demonſtratum eſt.

PROPOS. 17. PROBL. 2.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat.

EX puncto D, ducenda ſit linea, quæ tangat circulum FEC, cuius circuli centrum ſit B. Ducatur recta DB, ſecans circumferentiam FC, in E, puncto. Deinde centro B, interuallo BD, deſcribatur circulus DT, & ex E, educatur ET, perpendicularis ad DB, ſecans circulum DT, in T, puncto. Ducta denique recta BT, ſecans circulum FEC, in C, connectatur



recta

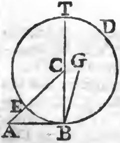
recta DC: quam dico tangere circulum FEC, in puncto C. Prob. Cum enim duo latera BE, BT, trianguli EBT, æqualia ſint duobus lateribus BC, BD, trianguli CBD, vtrumque vtrique, vt patet per circuli defin. Angulusque B, dictis lateribus comprehenſus ſit communis: (a) Erunt & baſes ET, CD, nec non etiam anguli BET, BCD, ſuper ipſas, æquales. Eſt autem BET, rectus per conſtructionem; quare & BCD, rectus erit. Itaque DC, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemidiametri CB, tanget circulum per corollarium præcedentis propoſ. A dato ergo puncto D, ducta eſt DC, recta tangens circulum FEC; in C, quod faciendum erat.

a 4. pri.

PROPOS. 18. THEOR. 16.

Si recta quæ piam linea circulum tangat, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea; quæ adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

RECta linea AB, tangat in puncto B, circulum EBDT, cuius centrum C, & ex C, ad B, recta ducatur CB. Dico CB, perpendicularem eſſe ad AB. Prob. Si enim non eſt ducatur CA, perpendicularis ad AB, ſecans circumferentiam in E. Quoniam igitur in triangulo CAB, (a) duo anguli CAB, ABC, ſunt minores duobus rectis: eſt autem per conſtructionem CAB, rectus: igitur CBA, erit minor recto. Quare maior erit recta (b) CB, quam CA: ſed recta CB, æqualis eſt ipſi CE; ergo CE, erit maior ipſa CA, pars quam totum quod eſt abſurdum.



a 17. pri.

b 19. pri.

Digitized by Google

dum: Eſt igitur CB, perpendicularis ad AB. Quare ſi circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 19. THEOR. 17.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta quæpiam linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

Tangat recta AB, circulum ABDT (vt in antecedenti figura) in puncto B; & ex B, ducatur BT, perpendicularis ad AB. Dico in BT, eſſe centrum circuli. Probatur. Si enim in ipſa BT, non eſt centrum circuli, erit extra, nempe in G, à quo ad contactum B, ducatur recta GB, quæ (a) perpendicularis erit ad AB. Quare angulus GBA, erit rectus; ſed etiam angulus CBA, per conſtructionem eſt rectus: igitur duo anguli GBA, & CBA, inter ſe æquales erunt pars, & totum: quod eſt abſurdum. Non igitur extra BT, centrum circuli exiſtet. Quare ſi circulum tetigerit recta quæpiam linea &c. Quod erat demonſtrandum.

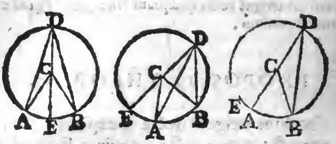
a 18. ter.

PROPOS. 20. THEOR. 18.

In circulo angulus ad centrum duplex eſt anguli ad periferiam, cum fuerit eadem periferia baſis angulorum.

IN circulo ADBE, cuius centrum C, ſuper baſin AB, conſtituatur angulus ACB, ad centrum: & ſuper

ſuper eandem baſin angulus ADB, ad periferiam. Di-



co angulum ACB, ad centrum duplum eſſe anguli ADB, ad periferiam. Probatur. Includant enim primum duæ DA, DB, duas CA, CB, & per centrum C, recta extendatur DE. Quoniam igitur duæ rectæ
a 5. pri. DA, DB, ſunt inter ſe æquales, (a) erunt anguli CDA, CAD, inter ſe æquales: Eſt autem externus angulus
b 32. pri. ACE, (b) æqualis duobus internis, & oppoſitis CDA, CAD: Quare ACE, duplus erit alterius eorum, vt anguli CDA. Eodem modo duplus oſtendetur angulus BCE, anguli CDB. Quapropter totus angulus ACB, duplus erit totius anguli ADB. Quando enim duæ magnitudines duarum ſunt duplæ, ſingulæ ſingularum, eſt quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Conſtat ergo propoſitum.

Deinde non includant rectæ AD, BD, rectas CA, CB, ſed DA, per centrum extendatur. Quoniam igi-
c 32. pri. tur externus angulus ACB, (c) æqualis eſt duobus internis CBD, CDB: hi autem duo ob æqualitatem la-
d 5. pri. terum CB, CD, (d) ſunt inter ſe æquales, erit angulus ACB, alterius eorum duplus nempe anguli ADB; quod fuit propoſitum.

Demum recta DA, ſecet rectam CB, & per centrum C, extendatur recta DE. Quoniam igitur angulus ECB, ad centrum, & angulus EDB, ad periferiam, habent eandem baſin EB, & recta DE, per centrum extenditur; erit angulus ECB, duplus anguli EDB, vt in ſecunda parte huius Propoſ. oſtenſum eſt.

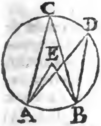
Simi-

Similì modo erit angulus ECA, duplus ànguli EDA, habent enim hi anguli eandem baſin E A. Reliquus igitùr angulus ACB, duplus erit reliqui anguli ADB. (e) Quando enim totum totius eſt duplum, & ablatum ablati, eſt & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex eſt &c. Quod erat demonſtrandum. e 20. prõ.

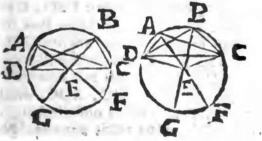
PROPOS. 21. THEOR. 19.

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli, ſunt inter ſe æquales.

IN circulo ABDC, cuius centrum E, exiſtant anguli C, & D, in ſegmento ACDB. Dico eos eſſe æquales. Probatur. In primis ſit ſegmentum ACDB, ſemicirculo maius; & ducantur rectæ AE, BE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus A E B, ad centrum, (a) duplus eſt tam anguli A C B, quam A D B, ad periferiam; cum omnes habeant eandem baſin A B; erunt anguli C, D, dimidiatæ partes anguli E. (b) Quare inter ſe æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli exiſtentes in ſegmento ACDB, oſtendentur eſſe æquales. a 20. ter. b 7. prŏ.



Sit deinde ſegmentum D A B C, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in ſegmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad

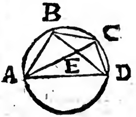


c 20.ter. ad centrum, (c) duplus eſt anguli DAF, ad periferiam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli ſimul DEF, CEG, duorum angulorum ſimul DAF, CAF, dupli erunt, hoc eſt, totius anguli DAC: Sunt autem anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt quoque tres anguli DEG GEF, FEC, ſimul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres an-
d 7. prõ. guli dupli anguli DBC. (d) Quare æquales erunt anguli DAC, DBC. Itaque in circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. 22. THEOR. 20.

Quadrilaterorum in circulis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, inſcriptum ſit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppoſitos ABC, ADC; item BAD, BCD, æquales eſſe duobus rectis. Probatur. Ductis enim diametris duabus AC, BD, (a)
a 21.ter. erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem ſegmento ABCD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc eſt totius angulus ABC, æqualis eſt duobus angulis ACD, CAD, nam duo anguli CBD, CAD, cum ſint in eodem ſegmento per 21. huius ſunt inter ſe æquales. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis
b 32.pri. DCA, CAD, & ADC. (b) Sed iſti tres æquales ſunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, ADC, duobus rectis æquales erunt. Eodem modo oſtendemus, angulos BCD, BAD, eſſe duobus rectis æquales. Nam rurſus

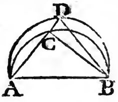


rurſus duo anguli ABD, ACD, (c) ſunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo B A D; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. (d) Sed hi tres ſunt æquales duobus rectis; Igitur & duo BCD, BAD, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis deſcriptorum, &c. Quod erat demonſtrandum. c 21. ter. d 31. pri.

PROPOS. 23. THEOR. 21.

Super eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ad eaſdem partes.

SI enim fieri poteſt ſuper recta AB, conſtituantur ad eaſdem partes duo ſegmenta ſimilia, & inæqualia ACB, ADB. Perſpicuum eſt autem, quod ſe ſolum interſecant in punctis A, & B; (a) Circulus enim circulum non ſecat in pluribus quam duobus punctis. Vnde peripheria vnius ſegmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, ſecans circumferentias in C, & D, connectanturque rectæ CB, DB. Quoniam igitur ſegmenta ponuntur ſimilia, erit per 10. Defin. huius lib. angulus ACB, æqualis anguto ADB, externus interno, (b) quod eſt abſurdum. Non igitur ſegmenta ſunt ſimilia. Quare ſuper eadem recta linea, &c. Quod erat oſtendendendum. a 10. ter. b 16. pri.

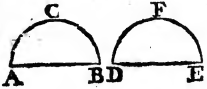


PRO-

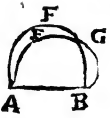
PROPOS. 24. THEOR. 22.

Super æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta, ſunt inter ſe æqualia.

SVper rectis lineis æqualibus AB, DE, conſtituta ſint ſegmenta ſimilia ACB, DFE. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Prob. Lineæ enim AB, DE, cum ſint æquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmentum ACB, ſegmento DFE, congruere. Si enim non congruit cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod ſi extra aut intra cadat, conſtituentur ſuper eadem recta DE, duo ſegmenta ACB, DFE, ſimilia, & inæqualia, quorum vnum totùm extra aliud cadit. Quod eſt abſurdum. (a) Demonſtratum enim eſt contrarium. Si vero ſegmentum vnum cadat partim intra partim extra, perſpicuum eſt huiuſmodi circulorum ſegmenta ſeſe ſecare in pluribus punctis quam duobus, nempe in punctis D, E, & G. Quod eſt abſurdum, (b) Circuli enim non ſe ſecant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur ſegmentum ACB, ſegmento DFE; atque adeo ipſa inter ſe æqualia erunt. Quo circa ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 23. ter.

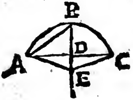


b 10. ter.

PROP. 25. PROBL. 3.

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

Sit ſegmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur ABD, vel maior eſt angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior (quod ſane continget quando ſegmentum ABC, ſemicirculo minus erit. Tunc enim quia BD, tranſit per centrum ex corollario propoſ. 1.



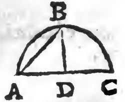
huius lib. quod centrum eſt extra ſegmentum, cum ſegmentum ponatur ſemicirculo minus; erit DA, maior quam DB, cum BD, perficiens diametrum ſit (a) omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, (b) maior erit angulo DAB) fiatque angulus BAE, (c) æqualis angulo DBA, & ſecet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cuius ſegmentũ eſt ABC. Prob. Ducta enim recta EC, erunt duo latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia duobus lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli dictis lateribus contenti æquales, nempe recti. Quare baſes AE, EC, (d) æquales erunt. (e) Eſt autem & EA, æqualis ipſi EB, quod anguli EBA, EAB, ſint æquales per conſtructionem. Igitur tres lineæ EA, EC, EB, æquales erunt: (f) Ac propterea E, centrum erit circuli ABC, cum ex E, plures quam duæ rectæ lineæ æquales cadant in circumferentiam.

a 7. ter.
b 18. pri.
c 23. pri.
d 4. pri.
e 6. pri.
f 9. ter.

Sit deinde angulus D B A, angulo D A B, æqualis: (quod continget quando ſegmentum ABC, ſemicirculus fuerit.) Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum atque

g 5. pri. adeo DA, DB, æquales: (g) quare, & anguli DAB, DBA,

h 6. pri. æquales erunt) (h) erunt igitur rectæ DA, DB, æquales. Erat autem, & DC, æqualis ipſi DA, nam recta AC, ſecta fuit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam; erit per 9. huius lib. D, centrum circuli ABC.

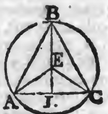


Sit tertio angulus DBA, angulo DAB, minor: (quod quidem eueniet, ſi ſegmentum ABC, ſemicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, tranſit per centrum ex correl. propoſ. 1. huius lib. quod quidem intra ſegmentum, cum maius eſſe

i 7. ter. ponatur, exiſtit; erit (i) DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quam D A; ideoque angulus

k 18. pri. DAB, (k) maior erit angulo DBA.)

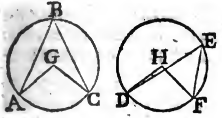
l 23. pri. Fiatque angulus BAE, (l) æqualis angulo D B A, & ſecet recta AE, rectam BD, in E, puncto; quod oſtendetur eſſe centrum eo modo, quo id ipſum oſtendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo DAB, dummodo ducatur recta E C. Circuli igitur ſegmento dato deſcripſimus circulum, cuius eſt ſegmentum. Quod erat faciendum.



PROPOS. 26. THEOR. 23.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus periferijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad periferias conſtituti inſiſtant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, conſtituti ſint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico periferias AC, DF, quibus inſiſtunt, eſſe æquales. Prob. Sumantur enim in periferijs ABC, DEF, duo puncta B, & E, ad quæ



rectæ ducantur AB, CD, DE, FE. Quoniam igitur anguli B, & E, (a) dimidij ſunt æqualium angulorum G & H; erunt & ipſi æquales inter ſe. Quare ex defin. ſegmenta ABC, DEF, ſimilia erunt. Et quia latera AG, GC, æqualia ſunt lateribus DH, HF, propter circulorum æqualitatem, & anguli, quos continent G, & H, æquales ex hypotheſi, ſi concipiantur baſes ductæ à puncto A, ad C, & à puncto D, ad F, erunt inter ſe (b) æquales. Cum igitur ſegmenta ſimilia ABC, DEF, ſint ſuper lineas æquales, ſeu baſes æquales AC, DF, (c) erunt ipſa inter ſe æqualia. Quare ſi à circulis æqualibus huiuſmodi ſegmenta æqualia demantur, remanebunt & ſegmenta AC, DF, inter ſe æqualia; atque adeo periferia AC, periferiæ DF, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

a 20. ter.

b 4. pri.

c 24. ter.

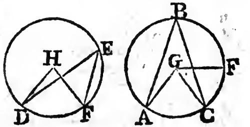
Sint deinde ad periferias conſtituti duo anguli æquales B, & E; Dico rurſus periferias AC, DF, ſuper quas inſiſtunt, eſſe æquales. Erunt enim, vt prius,

ſegmenta ABC, DEF, Similia. Cum igitur ſint ſuper æquales lineas AC, DF, (cum enim anguli G, H,
d 20. ter. æquales ſint, ſunt enim (d) dupli angulorum æqualium B, E, erunt vt prius rectæ ductæ à puncto A, ad
e 24. ter. C, & à puncto D, ad F, æquales) (e) erunt ipſa inter ſe æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt, & ſegmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, &c. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOS. 27. THEOR. 24.

In æqualibus circulis, anguli; qui æqualibus periferijs inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad periferias conſtituti inſiſtant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, inſiſtant primum anguli ad centra A G C, DHF, æqualibus peripherijs A C, D F. Dico angulos AGC, DHF, æquales inter ſe eſſe. Prob. Si enim non ſunt ęquales ſit angulus AGC,



a 23. pri. minor, (a) fiatque angulus AGI, æqualis angulo
b 26. ter. DHF. (b) Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum vero periferia AC, æqualis ponatur periferiæ DF; erunt periferiæ AI, AC, inter ſe æquales, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.

Inſiſtant deinde eiſdem periferijs æqualibus, AC, DF,

DF, anguli B, & E, ad periferias, quos rurſus dico eſſe æquales. Prob. Nam anguli B, & E, ad periferias, (c) ſunt ſub dupli angulorum G, H, ad centrum; ſed anguli G, H, ad centrum demonſtrati ſunt æquales; igitur & anguli B, & E, æquales erunt. In æqualibus igitur circulis anguli, qui æqualibus periferijs inſiſtunt, &c. Quod erat demonſtrandum. c 20. ter.

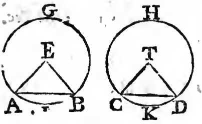
PROPOS. 28. THEOR. 25.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ æquales periferias auferunt, maiorem quidem maiori; minorem autem minori.

IN circulis æqualibus AGB, CHD, quorum centra E, & T, ſint rectæ æquales AB, CD. Dico maiorem periferiam A G B, æqualem eſſe maiori periferiæ CHD, & minorem A I B, minori CKD. Probatur. Ductis enim rectis E A, EB, TC, TD; erunt latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia lateribus CT, TD, trianguli CTD; ponuntur autem, & baſes AB, CD, æquales. Igitur (a) anguli E, & T, æquales erunt: ac propterea periferiæ AIB, CKD, quibus inſiſtunt, (b) æquales erunt: quæ ablatæ ex totis æqualibus relinquent etiam æquales AGB, CHD. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ &c. Quod erat demonſtrandum.

a 28. pri.

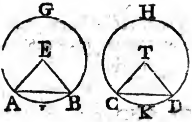
b 26. ter.



PROPOS. 29. THEOR. 26.

In æqualibus circulis, æquales periferias, æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

IN circulis æqualibus AGB, CHD, ponantur æquales periferiæ AGB, CHD; item AIB, CKD. Dico rectas AB, CD, quæ eas ſubtendunt, eſſe æquales. Prob. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia lateribus CT, TD, trianguli CTD; ſunt autem & anguli E, T,



a 27. ter. (a) æquales, quod æqualibus periferijs AIB, CKD, in-
b 4. pri. ſiſtant. Igitur & baſes AB, CD, (b) æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales periferias &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

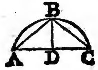
Proximæ antecedentes quatuor Propoſ. etiam in eodem circulo ſunt intelligendæ, quemadmodum conſtat ex adductis demonſtrationibus, quæ locum habent in vno, eodemque circulo.

PRO-

PROPOS. 30. PROBL. 4.

Datam periferiam biſariam ſecare.

Sit periferia ABC, biſariam ſecanda. Ducatur recta ſubtendens A C, qua biſariam in D, diuiſa, erigatur perpendicularis D B, quæ periferiam A B C, biſariam ſecabit in B, puncto. Probat. Ductis enim rectis AB, CD, erunt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB: ſunt autem & anguli deinceps ad D,



æquales, nempe recti. Igitur (a) & baſes AB, CD, æquales erunt; Ac propterea periferiæ AB, CB, (b) erunt æquales. Datam ergo periferiam ſecuimus &c. Quod erat faciendum.

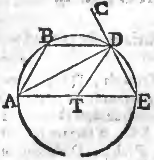
a 4. *pri.*
b 28. *ter.*

PROPOS. 31. THEOR. 27.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt; qui autem in maiori ſegmento, minor recto; qui vero in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt; minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

Circuli enim ABDE, cuius centrum T, diameter ſit AE, conſtituaturque in ſemicirculo angulus

ADE, exiſtetque angulus AED, in maiori ſegmento AED. Conſtituatur quoque in minori ſegmēto ABD, angulus ABD. Dico angulum ADE, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum vero AED, in maiore ſegmento, minorem recto: & angulum ABD, in minori ſegmento, eſſe maiorem recto. Item angulum maioris ſegmenti cōprehenſum recta AD, & periferia AED, eſſe recto maiorem. Et angulum minoris ſegmenti comprehenſum recta AD, & periferia ABD, eſſe recto minorem. Probatur. Ducatur enim recta DT, ad centrum, & extendatur recta ED, in C. Quoniam igitur rectæ TE, TD, æquales ſunt,



a 5. pri. (a) erit angulus TED, angulo TDE, æqualis. Eadem ratione erit angulus TDA, æqualis angulo TAD; ideoque totus angulus ADE, duobus angulis TAD,
b 32. pri. TED, æqualis erit. (b) Eſt autem & angulus ADC, externus eiſdem duobus internis angulis DEA, DAE, in triangulo DEA, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli ADE, ADC: ac propterea vterque rectus. Rectus igitur eſt angulus ADE, quod eſt propoſitum.

Quoniam vero in triangulo ADE, duo anguli DEA,
c 17. pri. EDA, (c) ſunt duobus rectis minores; & angulus EDA, oſtenſus eſt rectus; erit angulus DEA, in maiori ſegmento, recto minor: quod eſt ſecundum.

Rurſus, quia in quadrilatero ABDE, intra circulum deſcripto, (d) duo anguli oppoſiti ABD, DEA, ſunt duobus rectis æquales; & angulus DEA, oſtenſus eſt recto minor: Erit ABD, angulus in ſegmento minori, recto maior; quod eſt tertium.

Amplius cum angulus rectus ADE, pars ſit anguli ſegmenti maioris AED, qui ſane comprehenditur recta AD, & periferia DEA; erit angulus ſegmenti maioris,

ioris, recto maior, quod eſt quartum.

Demum, cum angulus ſegmenti minoris, nimirum comprehenſus recta AD, & periferia DBA, ſit quoque pars anguli recti A D C. Erit angulus ſegmenti minoris recto minor: quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Ex hac Propoſ. fit manifeſtum, quod angulus trianguli reliquis duobus exiſtens æqualis, rectus eſt, eo quod producto latere externus, qui fit, illi contiguus eiſdem ſit æqualis, ac proinde illi duo ſint inter ſe æquales, propterea que recti.

PROPOS. 32. THEOR. 28.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam alia recta linea circulum ſecans; anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

Tangat recta AB, circulum DEFC, in puncto C, à quo ducatur recta aliqua, nempe C E, ſecans, ſeu diuidens circulum in duo ſegmenta, in quibus fiant anguli C FE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem eſſe angulo C F E, in alterno ſegmento, & angulum BCE, æqualem eſſe angulo CDE, pariter in alterno ſegmento. Probat. Tranſeat enim primum linea ſecans circulum per centrum, & ſit CD. (a) Erit igitur vterque angulus in ſemicirculo rectus, vt eſt



a 31. ter.

eſt angulus CED; ſed etiam anguli duo ACD, BCD, qui fiunt à tangente AB, & à linea CD, per centrum
b 18.ter. tranſeunte, (b) ſunt recti. Igitur anguli à tangente AB, & ſecante CD, facti ſunt æquales angulis, qui in alternis ſegmentis conſtituuntur.

Vlterius non tranſeat recta ſecans circulum per centrum, & ſit verbi gratia CE, connectaturque recta
c 18.ter. EF, FC. (c) Cum enim CD, perpendicularis ſit ad AB, erit angulus BCD, rectus nec non etiam angu-
d 31.ter. lus CED, in ſemicirculo (d) rectus erit; vnde æquales erunt anguli BCD, CED; ſed angulus CED, in triangulo CED, rectus eſt; quare reliqui duo anguli EDC, DCE, vni recto æquales erunt, & per conſequens æquales angulo recto BCD. Dempto ergo communi angulo DCE, remanebit angulus ECB, æqualis angulo EDC, in alterno ſegmento conſtituto. Quoniam vero in quadrilatero CFED, duo anguli op-
e 22.ter. poſiti CFE, EDC, (e) ſunt æquales duobus rectis: (f)
f 13.pri. ſunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales, ſi auferantur æquales anguli BCE, EDC, remanebunt anguli ACE, CFE, inter ſe æquales. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem &c. Quod erat oſtendendum.

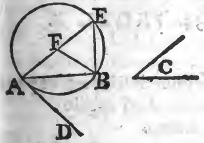
PROPOS. 33. PROBL. 5.

Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Recta data ſit AB, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur ſuper AB, ſegmentum deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis angulo dato C.

In

In primis ſi angulus datus C, fuerit rectus data recta AB, diuidatur biſariam, ipſaque exiſtente diametro ſuper ipſam ſemicirculus deſcribatur, factumque erit quod proponitur; nam angulus in illo ſemicirculo, (a) cum ſemper ſit rectus, æqualis erit dato recto. a 31. ter.



Deinde ſi angulus datus fuerit obtuſus, vel acutus, vt in præſenti figura, ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ certè cadet ſupra AB; fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, ſecetque BF, rectam AE, in F, puncto. (b) Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales, quare ſi centro F, & interuallo FA, deſcribatur circulus ABE, tranſibit per A, & B. Dico igitur angulum in ſegmento AEB, quod deſcriptum eſt ſuper AB, eſſe æqualem angulo C. Probatur. Fiat enim in dicto ſegmento angulus AEB. Quia igitur AE, tranſit per centrum F, & ei perpendicularis eſt DA, tanget recta DA, circulum in A, puncto per Coroll. Prop. 16. huius lib. Quapropter angulus DAB, hoc eſt angulus datus C, (c) æqualis erit angulo E, in alterno ſegmento AGB. Quoquo modo pariter procedẽdum erit, ſi angulus datus obtuſus erit. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum &c. Quod efficiendum erat.

b 6. pri.

c 32. ter.

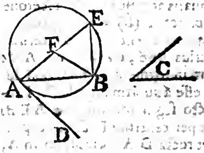
PRO

PROPOS. 34. PROBL. 6.

A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DAtus circulus ſit A B E, à quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtens æqualis ſit dato angulo C. (a) Ducatur recta D A, tangens circulum in A, puncto. Fiat deinde angulus DAB, æqualis angulo dato C. Dico igitur angulum AEB, in ſegmento ablato A E B, æqualem eſſe dato angulo C.

a 17. ter.

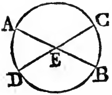


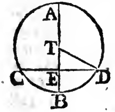
b 32. ter. (b) Eſt enim angulus DAB, æqualis angulo E, in alterno ſegmento A E B. Cum ergo angulo dato C, factus ſit æqualis angulus D A B, erit quoque angulus C, angulo E, æqualis. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum AEB, &c. Quod faciendum erat.

PROPOS. 35. THEOR. 29.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, ſecent ſe mutuo rectæ AB, CD, in E, puncto. Dico rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis AE, EB, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis, CE, ED.





Aut enim vtraque linea tranſit per centrum, aut vna tantum, aut neutra. Tranſeat primum vtraque per centrum, vt in prima figura. Quoniam igitur omnia quatuor ſegmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectanguli comprehēſum ſub duobus vnius lineæ ſegmētis æquale eſſe ei, quod ſub duobus alterius lineæ ſegmentis cōprehenditur, rectangulo.

Deinde tranſeat AB, ſola per centrum T; diuidatque primum rectam CD, biſariam in E; (a) Ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta DT. Quoniam igitur AB, diuiſa eſt per æqualia in T, & per inæqualia in E, (b) erit rectangulum ſub AE, & EB, vna cum quadrato rectæ TE, æquale quadrato rectæ TB, ideoque quadrato rectæ TD, cum rectæ TB, TD, ſint æquales: Eſt autem quadratum recte TD, (c) æquale quadratis rectarum TE, ED; Igitur rectangulum ſub AE, EB, vna cum quadrato intermediæ TE, æquale quoque erit quadratis rectarum TE, ED. Quare ablato communi quadrato rectæ TE, remanebit rectangulum ſub AE, EB, æquale qua-

a 3. ter.

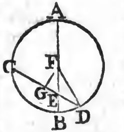
b 5. ſec.

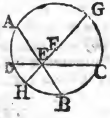
c 47. pri.

Digitized by Google

quadrato rectæ ED, hoc eſt, rectangulo ſub CE, &
ED; cum CE, ED, rectæ ſint æquales, ac proinde re-
ctangulum ſub eis comprehenſum, ſit quadratum.

Diuidat iam AB, tranſiens per centrum rectam CD,
non biſariam; ſecetur ergo CD, biſariam in G, ducan-
d 3. ter. turque rectæ FG, FD, (d) eritque FG, perpendicula-
ris ad CD. Quoniam vero rectangulum ſub AE, &
e 5. ſec. EB, vna cum quadrato rectæ FE, (e) æquale eſt qua-
drato rectæ FB, hoc eſt quadrato rectæ FD: eſt autem
quadratum rectæ FE, æquale (f) quadratis recta-
f 47. pri. rum FG, GE, & quadratum rectæ FD, æquale qua-
dratis rectarum FG, GD; erit quoque rectangulum
ſub AE, EB, vna cum quadratis FG, GE, æquale
quadratis rectarum FG, GD. Dempto ergo communi
quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum ſub AE,
& EB, vna cum quadrato rectæ GE, æquale quadra-
to rectæ GD. Atqui etiam rectangulum ſub CE, &
g 5. ſec. ED, vna cum quadrato rectæ GE; (g) æquale eſt ei-
dem quadrato rectæ GD: propterea
quod recta CD, ſecta ſit biſariam in
G, & non biſariam in E. Igitur re-
ctangulum ſub AE, & EB, vna cum
quadrato rectæ G E, æquale eſt re-
ctangulo ſub CG, GD, vna cum
quadrato eiuſdem rectæ GE. Quare
ablato communi quadrato rectæ
GE, remanebit rectangulum ſub
AE, EB, æquale rectangulo ſub
CE, ED. Quod eſt propoſitum.



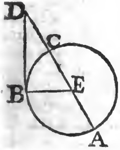


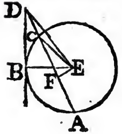
Tertiò, demum neutra per cen-
trum tranſeat, ſiue vna illarum bi-
ſariam diuidatur, ſiue neutra. Du-
catur per centrum, & punctum ſe-
ctionis E, recta GH; Quoniam ita-
que oſtenſum eſt, rectangulum ſub
AE, EB, æquale eſſe rectangulo ſub GE, & EH, ſiue
AB, diuidatur biſariam, ſiue non: Item rectangu-
lum ſub DE, & EC, æquale quoque eſſe eidem re-
ctan-

ctangulo ſub GE, & EH, ſiue DC, ſecta ſit biſariam, ſiue non: erit rectangulum ſub AE, & EB, æquale rectangulo ſub DE & EC, quod eſt propoſitum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOS. 36. THEOR. 30.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.





Extra circulum ABC, ſumatur aliquod punctum, nempe, D, à quo linea ducatur DA, ſecans circulum in C, (a) & linea BD, tangens circulum in B. D co rectangulum ſub DA, & DC, æquale eſſe quadrato rectæ DB. Prob. Tranſeat enim primum recta DA, per centrum E, iungaturque recta EB, quæ (b) perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuiſa eſt per æqualia in E, & ei addita in rectum, & continuum alia quædam CD, (c) erit rectangulum ſub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EC, hoc eſt cum quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ

a 17. ter.

b 18. ter.

c 6. ſec.

d 47. pri. ctæ DE; Eſt autem quadratum rectæ DE, (d) æquale quadratis rectarum DB, BE. Quare rectangulum ſub A D, D C, vna cum quadrato E B, æquale erit duobus quadratis ſua DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ E B, remanebit rectangulum ſub DA, DC, æquale quadrato rectæ D B. Quod fuit propoſitum.

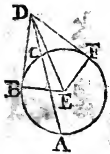
Denuo non tranſeat D A, ſecans per centrum E. Diuiſa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ EB, *e 18. ter.* EC, ED, EF, (e) eritque EB, ad DB, perpendicu- *f 3. ter.* laris; (f) & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuiſa *k 6. ſec.* eſt per æqualia in F, & ei addita recta CD, (k) erit rectangulum ſub DA, DC, vna cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum ſub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarũ DF, FE: ſed Quadratis rectarum CF, *g 47. pri.* FE, (g) æquale eſt quadratum rectæ, EC, ideoque & quadratum rectæ EB: Et quadratis rectarum DF, FE, *h 47. pri.* æquale (h) eſt quadratum rectæ ED. Quare rectangulum ſub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur qua- *i 47. pri.* dratum rectæ DE, (i) æquale ſit quadratis rectarum DB, BE, erit & rectangulum ſub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum ſub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod eſt propoſitum. Si igitur extra circulum ſummatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOS. 37. THEOR. 31.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; Sit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam periferiam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato: incidens ipſa circulum tanget.

Extra circulum ABF, cuius centrum E, punctum ſumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum ſecans in C, & recta DB, incidens in circulum ad punctum B; ſitque rectangulum ſub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. (a) Ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF; & ſi DA, non tranſeat per centrum E, vt eſt in præſenti figura, iungatur quoque recta ED. Quoniam igitur rectangulo ſub DA, DC, (b) æquale eſt quadratum rectæ tangentis DF: & eidem rectangulo ſub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB; erunt quadrata rectarum DF, DB, inter ſe æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter ſe erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia ſunt lateribus DB, BE, trianguli DBE, & baſis DE, communis, (c) erunt anguli DFE, DBE, æquales. (d) Sed angulus DFE, rectus eſt, quod DF, circulum tangat.



a 17. ter.
b 36. ter.
c 8. pri.
d 18. ter.

gat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per Coroll. Propoſ. 16. huius lib. DB, circulum tanget; quod eſt propoſitum. Si ergo extra circulum ſumatur punctum aliquod &c. Quod erat demonſtrandum.

Tertij libri Elementorum
Finis.

Digitized by Google

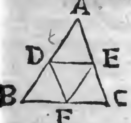
EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

FIgura rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

IN hoc quarto libro Euclides agit de varijs inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo factis, & earundem circa circulum deſcriptionibus. Nec non etiam tractat de inſcriptionibus circuli in figuris rectilineis, & de circuli deſcriptionibus circa eaſdem figuras rectilineas. Quapropter paucis definitionibus primo loco exponit quid ſibi velit, figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi; incipiens à figuris



rectilineis, nam ſi anguli D, E, F, interni trianguli

DEF, tangant latera AB, BC, CA, trianguli externi ABC, dicetur triangulum DEF, in triangulo ABC, eſſe inſcriptum.

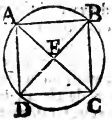
II.

Similiter etiam figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ circumſcribitur, latera, ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E conuerſo triangulum ABC, dicetur deſcribi circa triangulum DEF, quonam ſingula latera illius tangunt ſingulos angulos iſtius.

III.

Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli periferiam.

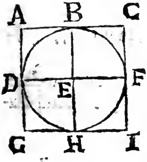


Vt ſi anguli A, B, C, trianguli ABC, tangant periferiam circuli A B C D, dicetur triangulum in circulo eſſe inſcriptum.

IV.

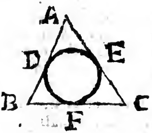
IV.

Figura vero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula latera eius, quæ circumſcribitur, circuli periferiam tangunt.



Vt verbi gratia, ſi latera trianguli ABC, tangant circulum DEF.

V.



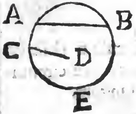
Similiter circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli periferia ſingula latera tangit eius figuræ, cui inſcribitur.

VI.

Circulus autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli periferia ſingulos tangit eius figuræ, quam circumſcribit, angulos.

VII.

Recta linea in circulo accommodari, ſeu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli periferia fuerint.

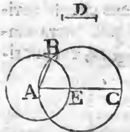


Quoniam enim recta linea AB, ſuis extremitatibus A, & B, tangit periferiam ABC, hinc eſt quod linea recta AB, circulo accomodata, ſeu coaptata dicitur nō vero CD.

PROPOS. I. PROBL. I.

In dato circulo rectam lineam accomodare, æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior.

IN circulo ABC, coaptanda ſit recta linea æqualis rectæ linæ datæD, quæ tamen maior non ſit diame-
a 15.ter. tro dati circuli ABC. Cum enim diameter circuli (a) ſit omnium rectarum in circulo maxima, ſi data recta diametro maior foret non poſſet in circulo aptari vna illi æqualis. Ducatur ergo diameter A C. Itaque ſi data recta D, æqualis fuerit diametro aptata erit AEC, illi æqualis; ſi vero D, minor fuerit diametro, (b) abſcindatur
b 3. pri. AE, æqualis ipſi D, & centro A, interuallo, AE, deſcribatur circulus BE, ſecans circulum ABC, in B, puncto. Ducta igitur recta a puncto A, ad punctum B, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. Prob. Eſt enim AB,
c 15.def. primi. (c) æqualis ipſi AE; ſed D, etiam ipſa per conſtructionem æqualis eſt ipſi AE; quare AB, & D, inter ſe quoque æquales erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accomodauimus, &c. Quod faciendum erat.

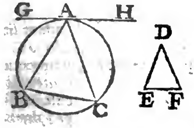


PRO-

PROPOS. 2. PROBL. 2.

In dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

IN circulo ABC, ſit deſcribendum triangulum æquiangulum triangulo dato DEF; ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC, angulo E, pariter æqualis fiat, extendanturq; rectæ AB, AC, ad circumferentiam vſque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG, ex eo quod anguli GAB, HAC, hoc eſt anguli F, E, (a) minores ſint duobus rectis; eſſent autem duobus rectis æquales per 13. primi, ſi AC, in AB, caderet, vel maiores duobus rectis ſi inter AB, & AG, caderet. Dico triangulum ABC, circulo dato inſcriptum, eſſe æquiangulum dato triangulo DEF. Probat. Eſt enim angulus C, (b) æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, per constructionem æqualis eſt angulus F; quare anguli C, & F, inter ſe æquales erunt. Similiter quia angulus B, (c) æqualis eſt angulo HAC; & eidem angulo HAC, per conſtructioné angulus E, æqualis: Quare erunt etiá anguli B, & E, inter ſe æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales ſint duobus angulis E, & F, in triangulo DEF; (d) erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum eſt ergo



a 17. pri.

b 32. ter.

c 32. ter.

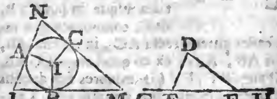
d 32. pri.

triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum deſcripſimus &c. Quod faciendum erat.

PROPOS. 3. PROBL. 3.

Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

Circa datum circulum ABC, deſcribendum ſit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF. Producto latere EF, vtrinque ad G, & H; ſumptoque centro circuli, nempe I, ducatur recta vtcunque AI, & poſtea fiat angulus AIB æqualis angulo



DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex punctis A, B, & C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares NL, LM, MN, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per Coroll. Prop. 16. lib. 3. coibuntque in punctis N, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli NAC, NCA, duobus rectis minores, ac proinde AN, CN, coibunt &c. Nam recta hæc AC, caderet ſupra rectas AI IC, quia hæ angulũ conſtituunt in I. Cũ enim ſpatiũ circa I, æquale ſit quatuor rectis ex Cor. 2. Prop. 15. l. 1. hoc eſt quatuor angulis factis à duabus rectis DE, DF, ſupra rectam GH, caden-

dentibus, ſintque duo anguli AIB, BIC, duobus angulis DEG, DFH, æquales, erit reliquum ſpatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æqualis; ſed hi, (a) minores ſunt duobus rectis; igitur & ſpatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC; alias ſpatium illud eſſet vel æquale duobus rectis, ſi nimirum AI, CI, vnam rectam lineam conſtituerent; vel maius duobus rectis, ſi recta linea AI, producta caderet ſupra IC; cadit igitur neceſſario AI, producta infra CI, ac propterea angulus fiet AIC, ad partes N; & ducta recta AC, faciet cum AN, CN, duos angulos minores duobus rectis; ideoque rectæ AN, CN, coibunt in puncto N. Quod totum dicendum erit de reliquis, quod ſcilicet coeant in punctis M, & L. Quo ſtante deſcriptum eſt triangulum NLM, circa circulum ABC, quod dico eſſe æquiangulum dato triangulo DEF. Probatur. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales ſunt quatuor rectis, vt ad Prop. 32. lib. 1. à Clauio demonſtr. & anguli LAI, LBI, ſunt duo recti propter perpendiculares IA, IB; erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli DEG, DEF, (b) ſint duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales anguli AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione oſtendemus angulum M, æqualem eſſe angulo DFE; (c) Reliquus igitur angulus N, reliquo angulo D, æqualis erit: atque idcirco triangulum LMN, æquiangulum triangulo dato DEF. Circa datum ergo circulum &c. Quod erat efficiendum.

a 17. pri.

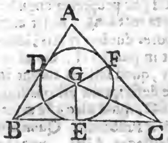
b 13. pri.

c 32. pri.

PROPOS. 4. PROBL. 4.

In dato triangulo circulum inſcribere.

SIt deſcribendus circulus in dato triangulo ABC. Diuiſis duobus angulis ABC, ACB, biſariam per 9. lib. 1. rectis BF, CD, quæ intra triangulum coeant in G, ducanturq; ex G, ad tria latera trianguli perpēdiculares GD, GE, GF. Quoniam igitur duo anguli GBD, GDB, in triangulo GBD, æquales ſunt duobus angulis GBE, GEB, in triangulo GEB, vterque



vtrique, & latus BG, commune; (a) erunt quoque
a 26. pri. latera GD, GE, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera GE, GF, in triangulis GEC, GFC. Cum igitur tres rectæ GD, GE, GF, ſint æquales circulus ex G, ad interuallum GE, deſcriptus tranſibit per reliqua puncta F, & D, per Coroll. Propoſ. 16. lib. 3. ex eo quod latera perpendicularia ſint ad ſemidiametros GD, GE, GF. In dato ergo triangulo circulum deſcripſimus &c. Quod erat efficiendum.

PROPOS. 5. PROBL. 5.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.

SIt circulus deſcribendus circa datum triangulum ABC. Diuidantur in primis duo latera AB, AC, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratia circa rectum, vel obtuſum angulum, quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, cum quæuis duo latera bifariam poſſint ſecari) bifariam in E, & F, punctis, ex quibus educantur ED, FD, perpendiculares ad dicta latera, & quæ coeant in puncto D, (quod enim coeant patet, quia ſi ducta eſſet recta EF, fierent anguli EFD, FED, duobus rectis minores) eritque D, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducanturque rectæ DA, DB, DC. Quoniam igitur latera AE, ED, trianguli AED, æqualia ſunt lateribus BE, ED, trianguli BED, & anguli ad E, recti, (a) erunt baſes DB, DA, inter ſe æquales. a 4. pri.



Eodemque modo erunt DC, DA, æquales. Cum ergo tres rectæ DB, DA, DC, ſint æquales, circulus deſcriptus ex D, ad interuallum DA, tranſibit etiam per puncta B, & C, circa datum ergo triangulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

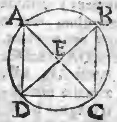
COROLLARIVM.

Ex hac propoſ. manifeſtum eſt, quod ſi centrum intra triangulum cadat, omnes angulos eſſe acutos,
b 31.ter. quoniam omnes (b) ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi
c 31.ter. vero ſit in latere BC, (c) angulum BAC, illi lateri oppoſitum eſſe rectum, ex eo quod ſit in ſemicirculo. Si
d 31.ter. denique cadat extra triangulum (d) angulum oppoſitum BAC, obtuſum eſſe cum in circuli minori ſegmento reperiatur. Quod totum valet etiam è conuerſo.

PROPOS. 6. PROBL. 6.

In dato circulo quadratum deſcribere.

SIt in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, ſecantes ſe ad angulos rectos in centro E, iunganturque rectæ AB, BD, CD, DA: Dico ABCD, eſſe quadratum inſcriptum in dato circulo.



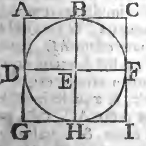
Brob. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia ſunt lateribus EC, EB, trianguli BEC, cum omnia ſint ex centro ad circumferentiam; rurſuſque & anguli contenti dictis lateribus æqualibus,
a 4.pri. ſunt æquales, nempe recti, (a) igitur baſes AB, BC, erunt æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD, itemque rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, ſunt inter
b 31.ter. ſe æqualia. Sunt autem & anguli (b) recti cum omnes in ſemicirculis exiſtant. Quare quadratum erit ABCD, vnde quadratum in dato circulo deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOS. 7. PROBL. 7.

Circa datum circulum quadratum deſcribere.

SIt circa datum circulum BDHF, cuius centrum E, deſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri BH, DF, ſeſe ſecantes in E, centro ad angulos rectos; & per B, D, H, F, educantur ad diametros lineæ perpendiculares AC, CI, IG, GA, coeuntes in punctis A, C, I, G. Quod enim coeant BA, DA, patet ex eo, quod ducta recta BD, faciat cum BA, DA, duos angulos duobus rectis minores, atque ita de reliquis. Dico ACIG, eſſe quadratum, circa circulum deſcriptum. Prob. Cum enim anguli BED, ADE, ſint recti, (a) erunt BH, AG, parallelæ; ſimiliterque erunt CI, BH, parallelæ. (b) Quare & AG, CI, inter ſe parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt AC, GI. Quoniam igitur parallelogrammum eſt ABHG, (c) erunt latera oppoſita AG, BH, æqualia, & anguli oppoſiti BAG, BHG, æquales: ſed BHG, eſt rectus, igitur & BAG, rectus erit. Quo pariter modo oſtendemus, angulos C, I, G, eſſe rectos; nec non etiam latera AC, CI, IG, GA, æqualia eſſe diametris BH, DF; Quare cum diametri ſint æquales, erunt & quatuor latera iam dicta inter ſe æqualia: ideoque ACIG, quadratum erit, cuius quidem latera circulum tangunt iuxta coroll. propoſ. 16. lib. 3. Quapropter circa datum circulum quadratum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.



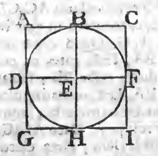
a 28. pri.
b 28. pri.
c 38. pri.

PRO-

PROPOS. 8. PROBL. 8.

In dato quadrato circulum deſcribere.

SIt in dato quadrato ACIG, inſcribendus circulus. Diuiſis lateribus biſariam in B, F, H, D, ducantur rectæ BH, DF, ſeſe ſecantes in puncto E. Quoniam igitur AC, GI, rectæ æquales ſunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AB, GH, æquales, & parallelæ.



a 33.pri. (a) Quare etiam AG, parallela eſt ipſi BH, & etiam æqualis. Eadem ratione erit CI, parallela, & æqualis ipſi BH: Itemque rectæ AC, GI, parallelæ erunt, & æquales ipſi DF. Sunt igitur parallelogramma AE, CE, IE, & GE; ideoque rectæ DE, EH, EF, EB, æquales erunt rectis AB, DG, CB, AD: ſunt autem hæ inter ſe æquales, cum ſint ſemiſſæ æqualium AC, AG &c. Quare & rectæ EB, ED, EH, EF, inter ſe æquales erunt; ac propterea circulus deſcriptus ex E, ad interuallum EB, tranſibit quoque per puncta D, H, & F. Qui circulus cum contingat latera AC, CI, IG,

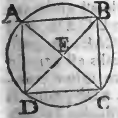
b 29.pri. GA, per Coroll. Propoſ. 16. lib. 3. (b) quod anguli ad B, D, H, T, ſint recti; deſcriptus erit in quadrato AI. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat.

PRO-

PROPOS. 9. PROBL. 9.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.

SIt deſcribendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, ſecantes ſe in E, puncto E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſunt, (a) erunt anguli ABD, ADB, æquales; eſt autem angulus BAD, rectus; (b) Quare ABD, ADB, anguli erunt ſemirecti. Similiter oſtendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, eſſe ſemirectos, & idcirco inter ſe æquales. Cum ergo anguli EAB, EBA, ſint æquales, (c) erunt rectæ EA, EB, æquales. Eademque ratione EA, ED, æquales erunt; ſicuti etiam ED, EC; Et demum EC, EB. Quare circulus ex E, interuallo EA, deſcriptus, tranſibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



a 5. pri.
b 32. pri.
c 6. pri.

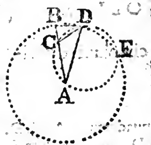
PROPOS. 10. PROBL. 10.

Iſoſceles triangulum conſtituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.

SVmatur quæuis recta linea AB, quæ diuidatur in C, (a) taliter vt rectangulum ſub AB, BC, æquale ſit quadrato rectæ AC, Deinde centro A, interuallo

a 11. ſec.

b 1. quar. uallo AB, circulus BDE, deſcribatur, in quo (b) accomodetur recta BD, æqualis



ipſi A C, iungaturque recta A D. Quoniam enim rectæ AB, A D, æquales ſunt, erit triangulum A B D, iſoſceles, Dico vtrumque angulorum ABD, ADB, duplum eſſe reliqui anguli A. Prob. Ductæ enim recta CD, (c) deſcribatur circa triangulum A C D,
c 5. quar. circulus D C A E. Quoniam igitur rectangulum ſub AB, BC, æquale eſt quadrato
d 37. ter. rectæ BD, & recta BA, ſecat circulum D C A E, (d) tanget, recta BD, eundem circulum DCAE, in pun-
e 32. ter. cto D. Quare angulus BDC, (e) æqualis eſt angulo A, in alterno ſegmento CAED. Addito igitur communi angulo CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CDA, C A D; ſed duobus angulis
f 32. pri. CDA, CAD, (f) æqualis eſt etiam angulus externus BCD. Angulus ergo B C D, æqualis erit angulo
g 5. pri. ADB, hoc eſt angulo ABD, (g) cum ABD, ADB,
h 6. pri. anguli ſint inter ſe æquales; ac propterea (h) rectæ DC, DB, æquales erunt: Eſt autem BD, æqualis poſita rectæ AC; igitur & CD, ipſi CA, æqualis erit; (i) ac
i 5. pri. propterea anguli CAD, CDA, æquales inter ſe erunt. Angulus igitur ADB, qui æqualis oſtenſus eſt duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, nimirum anguli A. Quare & angulus A B D, duplus erit eiuſdem anguli A. Iſoſceles ergo triangulum conſtituimus habens, &c. Quod faciendum fuit propoſitum.

COROLLARIVM.

Quoniam vero in triangulo ABD, tres anguli (a) ſunt æquales duobus rectis, hoc eſt quinque quintis duorum rectorum, euidens eſt, angulum A, eſſe quin-

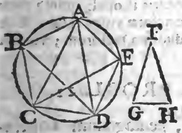
tam

tam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, eſſe duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, pariter eſſe quatuor quintas partes. Quandoquidem omnes tres (b) æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt decem quintis vnius recti. b 32. pri.

PROPOS. 11. PROBL. 11.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIt in dato circulo AB, CDE, inſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. (a) Conſtituatur triangulum Iſoſceles FGH, ita ut vterque angulorum G, & H, duplus ſit reliqui F; poſtmodum vero in circulo (b) inſcribatur triangulū ACD, triangulo FGH, æquiangulum; quo poſito vterq; angulorū ACD, a 10. quar. b 2. quar.



CDA, (c) bifariam diuidatur rectis CE, DB, iunganturque rectæ AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum ABCDE, in dato circulo inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Probatur. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus ſit anguli CAD, & bifariam diuiſus; erunt quinq; anguli ADB, BDC, DCE, ECA, & CAD, æquales. (d) Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, ſuper quos aſcenderunt, atque idcirco (e) rectæ etiam AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Æquilaterum eſt igitur pentagonum ABCDE. Rurſus quia arcus AB, ED, æquales ſunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. (f) Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus inſiſten- c 9. pri. d 26. ter. e 29. ter. f 27. ter.

tes, æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus, quorum ſinguli externis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum eſt ergo pentagonum ABCDE. Quare cum etiam æquilaterum fuerit oſtenſum, inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod erat efficiendum.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel ſex quintas vnius recti. (a) Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales ſint, vtpote qui æqualibus arcubus inſiſtant, ſit autem CAD, per Coroll. præcedentis Propoſ. quinta pars duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti. Erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum; vel ſex quintæ vnius recti.

PROPOS. 12. PROBL. 12.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

SIt circa datum circulum BDFHL, deſcribendum
a 11. quar. pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. (a) Inſcribatur in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius anguli ſint in punctis B, D, F, H, L. Deinde ex centro M, ad puncta B, D, F, H, L, ducantur rectæ MB, MD, MF, MH, ML, (quamuis in noſtra figura ad puncta B, & L, non ſint ducta) ad quas poſtea ducantur perpendiculares AC, CE, EG,



EG, GI, IA coeuntes in punctis A, C, E, G, I. Ducta enim recta DF, erunt duo anguli EDF, EFD, duobus rectis minores, cum ſint partes rectorum angulorum EDM, EFM; coibunt igitur iuxta 13. pron. rectæ DE, FE, ad partes E; ſicque de alijs. Et quia ipſæ tangunt circulum per Coroll. propoſ. 16. lib. 3. erit deſcriptum pentagonum ACEGI, circa datum circulum; quod dico eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Probat. Ductis enim rectis ME, MG, erunt quadrato rectæ ME, (b) æqualia tam quadrata rectarum MD, b 47. pri.
DE, quam rectarum MF, FE. Quare quadrata rectarum MD, DE, æqualia erunt quadratis rectarum MF, FE; demptis igitur æqualibus quadratis rectarum æqualium MD, MF, remanebunt quadrata rectarum DE, EF, æqualia; ideoque etiam rectæ DE, EF, æquales erunt. Quoniam ergo latera DM, ME, trianguli DME, æqualia ſunt lateribus FM, ME, trianguli FME, eſt autem & baſis DE, æqualis baſi EF, vt oſtenſum eſt; (c) erit angulus DME, angulo EMF, æqualis. c 8. pri.
Igitur & anguli (d) DEM, FEM. Duplus igitur eſt d 4. pri.
angulus DMF, anguli FME. Eodem modo oſtendemus angulum FMH, duplum eſſe anguli GMH; nec non etiam de reliquis. Cum igitur anguli DMF, FMH, (e) ſint æquales, ex eo quod inſiſtant æquali- e 27. ter.
bus circumferentijs (f) DF, FH, cum ipſæ; à f 28. ter.
rectis æqualibus DF, FH, auferantur: erunt & dimidij eorum EMF, FMG, æquales. Quocirca cum duo anguli EMF, EFM, trianguli EMF, æquales ſint duobus angulis GMF, GFM, trianguli GMF, & latus illis adiacens MF, commune; (g) erunt & latera g 26. pri.
EF, FG, æqualia, & anguli MEF, MGF, æquales. Dupla eſt ergo recta EG, ipſius rectæ EF. Eademque ratione oſtendemus EC, rectam duplam eſſe rectæ DE. Sunt autem oſtenſæ æquales DE, EF; igitur & earum duplæ EC, EG, æquales erunt. Similiter demonſtrabimus, rectas GI, IA, AC, æquales eſſe cuilibet rectarum CE, EG. Æquilaterum ergo eſt pentagonum ACEGI. Rurſus quoniam oſtenſum eſt,

angulos FEM, FGM, æquales eſſe, ac ſemiſſes angulorum DEF, FGH; erunt & eorum dupli DEF, FGH, æquales. Eademque ratione anguli HIL, LAB, BCD; cuilibet angulorum DEF, FGH, æquales erunt. Æquiangulum igitur eſt pentagonum ACEGI. Quapropter cum & æquilaterum ſit oſtenſum, deſcriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod erat efficiendum.

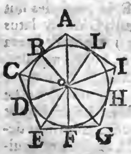
COROLLARIVM.

Ex hac demonſtratione ſequitur, quod ſi in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares, conſtituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum equalium circulo circumſcriptam, vt patet.

PROPOS. 13. PROBL. 13.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribere.

a 9. pri. INſcribendus ſit circulus ACEGI. Diuidantur duo eius anguli CAI, ACE, proximi (a) biſariam rectis AO, CO, quæ coeant in O, puncto, quod dico eſſe intra pentagonum; nam ſi à puncto O, connectantur rectæ OE, OG, OI, facile erit oſtendere omnes lineas à puncto O, ad angulos pentagoni ACEGI, ductas eſſe æquales. Quoniam enim latera AC, CO, trianguli ACO, æqualia ſunt lateribus EC, CO, trianguli ECO; ſunt autem & anguli ACO, ECO, dictis lateribus contenti æquales



per

per conſtructionem; (b) erunt & baſes AO, EO, & anguli CAO, CEO, inter ſe æquales. Cum igitur anguli CAI, CEG, ponantur æquales, & CAO, dimidium ponatur anguli CAI, per conſtructionem; erit & CEO, dimidium anguli CEG. Diuiſus eſt ergo angulus CEG, bifariam. Simili modo oſtendemus, reliquos duos angulos EGI, GIA, pariter eſſe bifariam diuiſos. Quo ſtante cum duo latera AC, CO, in triangulo ACO, æqualia ſint duobus lateribus EC, CO, in triangulo ECO, & anguli ACO, ECO, dictis lateribus æqualibus compræhenſi, ſint æquales per conſtructionem, (c) erit baſis AO; baſi EO, æqualis: quoquo modo etiam demonſtrabitur CO, CA, GO, EO, IO, inter ſe æquales eſſe: quapropter punctum O, erit intra pentagonum ACEGI. Ducantur iam ex O, ad ſingula pentagoni latera perpendiculares OB, OD, OF, OH, OL. Quoniam igitur duo anguli BAO, ABO, in triangulo ABO, æquales ſunt duobus angulis LAO, ALO, in triangulo ALO; eſtque latus AO, ſubtenſum vni æqualium angulorum, commune; (d) erunt & rectæ BO, LO, æquales. Similiterque oſtendentur reliquæ perpendiculares DO, FO, HO, æquales cuilibet iſtarum. Circulus igitur deſcriptus ex centro O, & interualo OL, tranſibit quoque per puncta H, F, D, B; quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt per coroll. propoſ. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cum ſemidiametris BO, DO; erit circulus BDFHL, in dato pentagono inſcriptus. Quod faciendum erat.

b 4. pri.

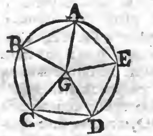
c 4. pri.

d 26. pri.

PROPOS. 14. PROPL. 14.

Circa datum pentagonum æquilaterum,& æquiangulum circulum deſcribere.

SIt circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum circulus deſcribendus. Diuiſis duobus angulis BAE, ABC, biſariam rectis AG, BG, quæ coeant in puncto G, intra pentagonum, vt in antecedente propoſ. demonſtratum eſt; & coniunctis rectis GC, GD, GE, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. etiam reliquos angulos BCD, CDE, DEA, ſectos eſſe biſariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter ſe æquales, ex eo quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AGB, duo anguli BAG, ABG, æquales ſunt; (a) erunt rectæ AG, BG, inter ſe æquales. Eademque ratione erunt reliquæ, GE, GD, GC, cuilibet iſtarum æquales. Quare circulus deſcriptus ex centro G, interuallo GA, tranſibit quoque per puncta B,C,D,E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.



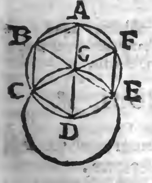
a 6. pri.

PROPOS. 15. PROBL. 15.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIt in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inſcribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum, Ducta diametro AD, ex centro D, interual-

uallo DG, deſcribatur circulus, qui ſecet circulum datum in punctis C, & E, e quibus per centrum G, extendantur rectæ CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF, quod dico æquilaterum, & æquiangulum eſſe. Prob. Cum enim recta GC, æqualis ſit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex defin. circuli; erunt & rectæ GC, DC, æquales inter ſe: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare tres anguli in ipſo (a) erunt æquales inter ſe: qui cum æquales ſint duobus rectis, (b) erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autem tres anguli CGD, DGE, EGF, (c) æquales duobus rectis. Reliquus igitur, angulus EGF, erit quoque tertia pars duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter ſe æquales; quibus cum etiam (d) equales ſint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erunt ſex anguli ad centrum G, conſtituti æquales. (e) Quare circumferentiæ, quibus inſiſtunt, (f) ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum eſt hexagonum ABCDEF. Rurſus, quia circumferentia BC, æqualis eſt circumferentiæ AF; ſi cõmunis addatur CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipſis inſiſtentes BAF, ABC, (g) æquales erunt. Similiterque oſtendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales eſſe cuilibet iſtorum; quia nimirum quilibet inſiſtit arcui compoſito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inſcripta demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus inſiſte-



a 5. pri.
b 32. pri.
c 13. pri.
d 15. pri.
e 26. ter.
f 29. ter.
g 27. ter.

re. Quare æquiangulum quoque eſt hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, Hexagoni latus æquale eſſe ſemidiametro circuli: Nam DC, latus hexagoni æquale eſt ſemidiametro DG, ex defin. circuli.

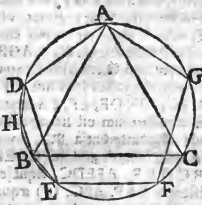
PROPOS. 16. PROBL. 16.

In dato circulo quinti decagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

SIt in dato circulo ABC, inſcribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. In dato circulo conſtituatur triangulum (a) æquilaterum ABC, quod etiam æquiangulum erit ex Coroll. prop. quintæ libri 1. (b) Eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt tota circumferentia ABC, talium quinque erit arcus AB,

a qua

b 26. vel 28. ter.



c 11. qu.

qui ex dictis tertia pars eſt circumferentiæ. (c) Inſcribatur rurſus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ADEFG, applicans vnum angulum ad punctum A: (d) eruntque quinque arcus AD, DE, EF, FG, GA, æquales. Qualium igitur partium

tium

tium æqualium quindecim eſt tota circumferentia ABC talium trium erit arcus A D, quinta pars exiſtens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinque, & arcus AD, tres; continebit reliquus arcus DB, duas. Diuiſo ergo arcu DB, (d) biſariam in H, erit arcus BH, pars decima quinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BH, ſubtendet decimamquintam partem totius circumferentiæ; cui ſi aliæ quatuordecim, (e) æquales in circulo accommodentur, in circulo inſcriptum erit quintidecagonum æquilaterum, quod (f) & æquiangulum eſt, cum eius anguli ſubtendant arcus æquales, nempe compoſitos ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perſpicuum eſt. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

d 30. ter.

e 1. quar.

f 27. ter.

Pari modo per ea, quæ ſupra ad propoſ. 12, 13, & 14. huius lib. dicta ſunt de pentagono, deſcribemus etiam circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Nec non etiam in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum deſcribemus; & tandem circa datum quintidecagonum circulum deſcribemus.

Elementi Quarti finis.

Digitized by Google

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.

I.

PArs eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EVclides in quatuor antecedentibus libris quantitatem continuam abſolutè conſiderauit; in hoc autem libro illam eandem quantitatem examinat non abſolutè, ſed prout ad aliam refertur, hoc eſt quatenus comparata ad aliam cum illa aliquam proportionem habet: nullatenus deſcendendo ad vllam quantitatis ſpeciem, vt ad lineam, ſuperficiem, vel corpus, ſed ſolummodo in genere quantitatis continuæ proportiones exponit. Quare vt inſtitutum ſeruet definitiones ad proportionum demonſtrationes neceſſarias proponit.

In primis inquit, magnitudinem illam minorẽ quæ maiorem aliam magnitudinem metitur, partem appellari. Vt e.g. quoniã magnitudo trium cubitorũ ter ſumpta metitur aliam magnitudinẽ 9. cubitorum, ideo prima

ma magnitudo minor, dicitur pars ſecundæ magnitudinis, nempe maioris. E contra vero quia magnitudo trium cubitorum non metitur magnitudinem decem cubitorum, ideo magnitudo 3. cubitorum non dicitur pars magnitudinis 10. cubitorum. Nam ter ſumpta non adæquat, & quater excedit, quod totum requiritur, vt vna magnitudo dicatur pars alterius.

Aduertendum tamen eſt, quod pars apud Mathematicos eſt duplex, nam alia eſt pars aliquota, alia aliquanta. Pars aliquota dicitur illa, quæ metitur ſuum totum, itaut aliquoties repetita totum ſuum conſtituat, vt eſt numerus 2. cum 6. 3. cum 9. &c. collatus.

Pars vero aliquanta dicitur illa, quæ adæquate non metitur ſuum totum, ſed aliquoties ſumpta vel ipſum excedit, vel ab eodem deficit; cuiuſmodi pars eſt numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 16. &c.

Si autem quæratur quænam ex iſtis partibus fuerit ab Euclide definita. Reſp. (quidquid alij dicant) ſolam partem aliquotam per datam Euclidis definitionem definiri, tum quia hæc ſolummodo metitur ſuum totum, tum etiam quia, vt ex lib. 7. conſtat, pars aliquanta in numeris ab Authore huius libri non dicitur pars, ſed partes. Nam numerus 4. non eſt pars numeri 6. ſed duæ partes tertiæ, quales ſunt duo binarij.

II.

Multiplex autem eſt maior minoris, cum minor metitur maiorem.

QVando enim vna magnitudo ab alia metitur, vt numerus 8, qui metitur à numero 4, tunc commenſurata magnitudo multiplex dicitur commenſurantis; vnde ſequitur quod ſi duæ magnitudines minores duas alias maiores æque metiantur, hoc eſt vna

mi-

minor in vna maiore toties contineatur, quoties altera minor in altera maiore vt exemp. gratia 9. & 15. reſpectu 3. & 5. dicuntur æquè multiplices.

III.

Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam, ſecundum quantitatem, habitudo.

QVando enim duæ quantitates eiuſdem generis, vt duo numeri, duæ ſuperficies, duo ſolida &c. comparantur inter ſe ſecundum rationem quantitatiuam, hoc eſt quatenus vna maior eſt, vel minor, vel æqualis alteri, huiuſmodi comparatio, ſeu reſpectus mutuus, appellatur ratio, ſeu Proportio. Illa vero quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & alijs antecedens proportionis: Ea vero ad quam alia refertur conſequens proportionis.

IV.

Proportio vero, eſt rationum ſimilitudo.

IN hac quarta definitione id, quod proportio appellatur, illud ipſum à Græcis Analogia, & à quamplurimis latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum enim comparatio duarum quantitatum inter ſe dicitur proportio; ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter ſe, proportionalitas ſolet nuncupari. Quia enim proportio numeri 12. ad 4. eadem eſt ac 9. ad 3. hinc eſt quod habitudo inter has proportiones proportionalitas dicatur.

Aduertendum tamen eſt id, quod dicit Clauius in hoc loco, quamplurimos ſcilicet Mathematicos compa-

ratio-

rationem duarum quantitatum proportionem, habitudinem autem proportionum proportionalitatem appellare. Quod ſane nos etiam impoſterum obſeruabimus.

Multæ autem proportionum habitudines, ſeu proportionalitates à ſcriptoribus aſſignantur, videlicet proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Muſica, ſeu Armonica; quamuis Euclides in hoc libro circa Geometricam tantummodo verſetur, quæ duplex aſſignantur Continua ſcilicet, atque Diſcreta. Continua eſt, in qua ſingulæ quantitates intermediæ bis ſumuntur taliter, vt nulla fiat proportionum interruptio, ſed quælibet intermedia quantitas ſit, & antecedens, & conſequens. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio A, ad B, eadem eſt B, ad C, &c. Diſcreta verò proportionalitas eſt illa, in qua ſingulæ quantitates intermediæ ſemel tantum accipiuntur, taliter vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas ſit antecedens, & conſequens; vt ſi dicatur, quæ eſt proportio A, ad B, ea eſt C, ad D, &c.

PROPORTIONIS Diuiſio.

QVot ſint genera proportionum apud Mathematicos, & quæ ſint præcipuæ proportionalitates compendioſe exponere operepretium duxi, non ſolum vt ea, quæ ab Euclide in 5. & 6. libro demonſtrantur, rebus materialibus accommodari poſſint, verum etiam vt ea, quæ à Mathematicis, & Philoſophis de motuum proportione diſputantur, clarius intelligi queant.

Proportio igitur ab Euclide definita diuiditur

tur in proportionem Rationalem, & Irrationalem. Rationalis eſt illa, quæ in numeris poteſt exhiberi: & hac modo ſe habet proportio illa; quæ cadit inter lineas, quarum vna eſt 20. palm. altera vero eſt 10. palm; hæc enim proportio cadens inter has duas lineas per numeros 20, & 10, exprimitur. Proportio vero Irrationalis eſt illa, quæ in numeris non poteſt exhiberi; cuiuſmodi eſt proportio diametri alicuius quadrati ad latus eiuſdem quadrati: quod totum ab Euclide in 10. lib. demonſtratur.

Alij vero aliter explicant huiuſmodi proportiones, dicendo ſcilicet, proportionem Rationalem cadere inter quantitates commenſurabiles, nempe illas, quæ habent vnam communem partem aliquotam, ſeu quas eadem menſura communis metitur. Et hoc modo ſe habet linea 20. pal. & linea 8. pal. Nam linea 4. pal. eſt pars aliquota tam lineæ 20. quam 8. pal. Nec aliter numeri dicuntur commenſurabiles, nam ſaltem vnitas omnes metitur. E contra vero Proportio Irrationalis eſt illa, quæ cadit inter duas quantitates incommenſurabiles, nempe illas, quæ nullam habent communem partem aliquotam, ſeu quarum nullam communem menſuram poſſumus reperire. Huiuſmodi autem ſe habent hæ duæ quantitates, nempe diameter quadrati, & latus eiuſdem quadrati; licet vtraque iſtarum quantitatum habeat partes aliquotas, ſcilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. attamen nulla pars aliquota vnius quantitatis poteſt aliam

quan-

quantitatem metiri, vt ab Euclide in 10. lib. demonſtratum fuit;

Ex modo dictis colligitur in numeris, ſolam proportionem Rationalem reperiri, quia ſaltem vnitas omnes numeros metitur; at vero in quantitate continua non ſolum proportio Rationalis, verum etiam Irrationalis inuenitur. Alij poſtea aliter proportionem partiri ſolent, nempe in proportionem Aequalitatis, & Inæqualitatis. Prima eſt illa, quæ cadit inter duas quantitates æquales, vt inter duas lineas, quarum vtraque eſt 10, 20, vel 100. palmorum, &c. Proportio vero Inæqualitatis eſt illa, quæ cadit inter duas quantitates inæquales, videlicet inter duas lineas, quarum vna eſt 20, palm. altera 40, 60, 100, &c.

Notandum tamen eſt quod duo proportionum genera vltimo loco aſſignata cum prioribus talem habent connexionem, vt ſcilicet omnis proportio Aequalitatis ſit ſemper Rationalis, non autem è contra. Item omnis proportio Irrationalis eſt ſemper neceſſario Inæqualitatis, at non è conuerſo, vt conſideranti patebit.

Ommiſſa igitur Aequalitatis proportione, quæ vlterius ſubdiuidi nequit, nam omnes quantitates æquales eandem ſemper habent proportionem æqualitatis; hac in quam ommiſſa ad aliam proportionem Inæqualitatis tranſeamus.

Inæqualitatis proportio ſubdiuiditur in proportionem maioris, & minoris inæqualitatis. Proportio maioris Inæqualitatis eſt, quando maior quantitas cum minore confertur; hancque pro-

por-

portionem habet numerus 20. ad 10. comparatus. E contra vero proportio minoris Inæqualitatis eſt, quando minor quantitas cum maiore confertur vt eſt numerus 10.ad 20. comparatus; vel quando linea 4. palm. cum linea 10. palm. confertur. Neque enim eadem eſt proportio 6, ad 10, ac 10, ad 6, vt clare patet, vel mediocriter in Algebræ regulis verſatis.

Verum in hoc loco dumtaxat ſermonem excitamus circa proportiones maioris, vel minoris inæqualitatis, quatenus ſolas proportiones Rationales comprehendunt: de reliquis vero proportionibus Irrationalibus in 10. lib. agunt Authores.

Quare Rationalis proportio minoris, vel maioris Inęqualitatis in 5. genera diſtribuitur, videlicet in Multiplicem, Superparticularem, Superpartientem, Multiplicem Superparticularem, & Multiplicem Superpartientem, cum hac ſolum diſcrimine, quod in proportione minoris Inęqualitatis ſingulis vocabulis præponitur prępoſitio SVB, dicendo ſub multiplicem, ſub ſuperparticularem, &c.

Ex his quinque proportionum generibus alia ſunt ſimplicia, alia compoſita. Simplicia ſunt tria priora, reliqua vero duo compoſita.

Quod autem proportio Rationalis maioris, vel minoris inęqualitatis adæquate in quinque aſſignata genera diſtribuatur poſita iſtorum generum explicatione oſtendemus.

DE PROPORTIONE Multiplici.

PRoportio multiplex definitur, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem taliter aliquoties continet, vt minor metiatur maiorem. Hanc proportionem habet numerus 20. ad 4. ſiquidem 20. quinquies comprehendit 4. Quod pariter dicendum venit circa lineam 20. pedum ad lineam 5. pedum comparatam, &c.

Huiuſmodi proportio ſub ſe infinita continet genera; nam ſi in proportione multiplici maior quantitas minorem bis tantummodo contineat, dicitur proportio Dupla: ſi vero ter contineat, dicitur tripla, ſi quater quadrupla, ſi decies decupla, &c.

Hoc poſito facili negotio definiuntur ſpecies proportionis multiplicis; ſiquidem proportio tripla nil aliud eſt quam habitudo maioris quantitatis ad minorem taliter, vt maior ter minorem complectatur. Pariter proportio octupla eſt illa habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur, vt numerus 48. ad 6. habet proportionem octuplam, quia octies ipſum 6. continet. Quod totum valet etiam de reliquis ſpeciebus. Proportionis multiplicis.

DE

DE PROPORTIONE Superparticulari.

DEfinitur proportio Superparticularis, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quaa lò maior minorem ſemel dumtaxat continet, & inſuper vnam eius partem aliquotam, ſcilicet dimidiatam, 3.4.5. &c. Hanc proportionem habet numerus 3. ad 2. Nam numerus 3. ſemel continet 2; & inſuper vnitatem, quæ eſt pars dimidiata ipſius 2. Item linea 12. pedum ad lineam 9. pedum propoſitionem habet ſuperparticularem, quia ſcilicet prior linea ſemel continet poſteriorem, & inſuper lineam 3. pedum, quæ eſt 3. pars lineæ 9. pedum.

Hæc pariter proportio in infinita genera ſubdiuiditur. Nam ſi illa pars aliquota in maiori quantitate contenta eſt dimidiata pars minoris quantitatis, conſtituitur proportio ſeſquialtera; ſi autem eſt tertia pars, inſurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi centeſima, ſeſquicenteſima, &c. Vnde mediante hoc vocabnlo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuper particularium. Proportio enim ſeſquioctaua eſt quando maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris quantitatis: qualis eſt proportio inter 9. & 8: item inter 45. & 40. Siquidem 9. ſemel continet 8. & inſuper vnam vnitatem, quæ eſt octaua

pars ipſius 8: ſicuti etiam 45. ſemel continet 40; & inſuper 5. octaua pars ipſius 40.

DE PROPORTIONE Superpartiente.

SVperpartiens proportio definitur, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel dumtaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas non efficientes vnam aliquotam. Huiuſmodi proportionem habet numerus 8. ad 5. Siquidem numerus 8. ſemel continet 5. & inſuper tres vnitates, quarum quælibet eſt pars aliquota, nempe quinta huius numeri 5. Ipſe autem ternarius ex illis tribus vnitatibus compoſitus, non eſt pars aliquota ipſius numeri 5.

Et hic eſt aduertendum, quod in data definitione dictum fuit, partes illas aliquotas ſimul ſumptas non debere conſtituere vnam partem aliquotam, quia ſic diſtinguimus proportiones ſuperparticulares à ſuperpartientibus. Dantur enim quædam proportiones, quæ primo aſpectu videntur ſuperpartientes, cum tamen reuera ſint ſuperparticulares: vt patet inter numeros 10. & 8. Quamuis enim 10. ſemel contineat 8, & inſuper duas vnitates, quarum quælibet eſt octaua pars numeri 8; quia tamen illæ vnitates ſimul ſumptæ conſtituunt binarium, quod eſt quarta pars numeri 8, ideo iſta proportio non

eſt

eſt ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta.

Pariter huiuſmodi proportio ſuperpartiens habita ratione partium aliquotarum diuiditur in genera infinita: ſi enim maior quantitas minorem ſemel comprehendat, & duas eius partes aliquotas modo ſupra aſſignato, tunc conſurgit proportio ſuperbipartiens; ſi autem maior quantitates minorem ſemel comprehendat, & inſuper tres partes aliquotas, tunc conficitur proportio ſupertripartiens, &c.

Vlterius quodcunque ex aſſignatis generibus, habita ratione denominationis partium aliquotarum, adhuc diuiditur in genera infinita. Hinc eſt quod proportio Superbipartiens inter duas quantitas inæquales, quarum maior ſemel continet minorem, & duas eius partes tertias, dicitur ſuperpartiens tertias; & ſi illæ duæ partes fuerint quintæ appellabitur ſuperbipartiens quintas, &c.

Si autem quæratur quomodo cognoſci poſſit an vnus numerus habeat communem menſuram cum alio nec ne: Reſpondeo hac totum manifeſtari ab Euclide in lib. 7. in quo loco aſſignat regulam inueniendi communem menſuram numerorum, illoſque numeros, qui communem menſuram non habent præter vnitatem, vt 8. & 3. primos vocat.

DE PROPORTIONE Multiplici ſuperparticulari.

DEfinitur proportio multiplex ſuperparticularis, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Huiuſmodi proportio eſt, quam habet numerus 9. ad 4. Continet enim 9. bis 4. (& quo ad iſtam partem hæc proportio conuenit cum multiplici, nempe cum Dupla,) & vlterius comprehendit vnitatem, quæ eſt quarta pars numeri 4. (& quantum ad hoc iſta proportio conuenit cum ſuperparticulari, nempe ſeſquiquarta:) qua de re hæc proportio optime multiplex ſuperparticularis, ideſt ex multiplici, & ſuperparticulari reſultans, appellatur.

Diuiditur poſtea proportio iſta habita ratione proportionis multiplicis in genera infinita, eo prorſus modo, quo dictum eſt de multiplici nempe in duplam ſuperparticularem, triplam ſuperparticularem, &c. & inſuper vnam partem minoris aliquotam.

Denuo quodcunque ex aſſignatis generibus in infinita genera ſubdiuiditur, habita ſemper ratione proportionis ſuperparticularis: Nam proportio tripla ſuperparticularis continet ſub ſe

tri-

triplam ſeſquialteram, quando ſcilicet maior quantitas minorem ter contineat, & vlterius dimidiatam eius partem; triplam ſeſquitertiam, triplam ſeſquiquartam, &c.

DE PROPORTIONE Multiplici ſuperpartiente.

DEmum Proportio multiplex ſuperpartiens definitur, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties minorem complectitur, & inſuper aliquot eius partes aliquotas non efficientes vnam aliquotam. Huiuſmodi proportionem habet numerus 11. ad 3. Nam 11. ter complectitur 3, & inſuper duas vnitates, quæ ſimul ſumptæ non conſtituunt vnam partem aliquotam, vt patet.

Diuiditur primò hæc proportio habita ratione proportionis multiplicis in duplam ſuperpartientem, triplam ſuperpartientem, quadruplam ſuperpartientem, &c.

Quodlibet poſtea iſtorum generum, habita ratione numeri partium, ſub ſe continet infinita genera. Vt v. g. ſub tripla proportione ſuperpartiente continetur tripla ſuperbipartiens, tripla ſupertripartiens, tripla ſuperquadripartiens, &c.

Demum quæcumque iſtarum proportionum habita ratione partium aliquotarum, in genera adhuc infinita ſubdiuiditur. Vt v. g. tripla ſupertripartiens diuiditur in triplam ſupertripar-

tientem quartas, in triplam ſupertripartientem quintas, 6. 7. 8. &c. Quarum proprias definitiones aſſignare ex dictis facile quicumque depromere poterit.

DE PROPORTION. Rationalibus minoris Inæqualitatis.

OMnia illa, quæ hactenus dicta ſunt de quinque proportionum rationalium generibus circa proportiones maioris inæqualitatis, ſunt pariter intelligenda circa quinque proportionum genera correſpondentia proportionibus minoris inæqualitatis, præmittendo ſolum præpoſitione, SVB; Nam ſi in adductis exemplis minores quantitates conferantur cum maioribus habebunt proportiones minoris inæqualitatis. Eo autem prorſus modo, quo ſe habet 100. ad 1, ita 1. ad 100. Hinc eſt, quod ex dictis prportio 100. ad 1, eſt centupla; ita 1. ad 100. eſt ſubcentupla; ſicque diſcurrendo de reliquis proportionum generibus.

Hæc ſunt illa genera, in quæ proportio Rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis diuiditur. Quod vero alia non poſſint aſſignari probant Authores, & præcipue Clauius, in hoc loco; & hæc compendioſe dicta ſufficiant circa quinque proportionum Rationalium genera,

plura

plura cupiens Clauium conſulat, qui hanc materiam, & alias etiam quamplurimas ſapientiſſime expoſuit.

De Proportionalitatibus ab Euclide definitis.

PRoportionalitas ab Euclide definita in plura genera partitur, quorum præcipua hæc ſunt, videlicet Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, & Muſica, ſiue Armonica; quæ proportionalitatis genera à Boetio, & alijs vocantur medietates.

Arithmetica proportionalitas eſt quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur; vt ſunt iſti numeri 4, 7, 10, 13, 16, &c.

Geometrica vero proportionalitas eſt quando tres, vel plures numeri eandem habent proportionem, quam quidem Euclides definiuit, quia hæc propriè proportionalitas dicitur, ſiue Analogia. Vt v. g. iſti numeri 2, 6, 18, 54, &c. quilibet autem iſtorum numerorum ad ſuum antecedentem triplam habet proportionem, ac propterea huiuſmodi numeri dicuntur geometricè proportionales.

Demum proportionalitas Muſica, ſiue Harmonica eſt quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem ſit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentia

inter

inter duos minores. Vt v. g. hi tres numeri *3*, *4*, *6*, in quibus eadem eſt proportio maximi numeri *6*, ad minimum *3*, quæ differentiæ inter maximũ *6*, & medium 4, nimirum numeri 2, ad diferentiam inter medium 4, & minimum 3. ideſt 1. (cum vtraque proportio ſit dupla) conſtituunt proportionalitatem Muſicam, ſiue Harmonicam.

Huiuſmodi autem proportionalitas dicitur Muſica; quia plerumque eius numeri habent illas proportiones, in quibus conſiſtunt Muſicæ conſonantiæ, vt patet in adducto exemplo, nam inter *6*, & 4, eſt proportio ſeſquialtera conſtituens conſonantiam, quæ Diapente, ſiue Quinta dicitur. Inter 4, & *3*, eſt proportio ſeſquitertia conſtituens conſonantiam, quam Diateſſeron, ſeu quartam vocant. Denmum inter extremos *6*, & *3*, cernitur proportio dupla conſtituens conſonantiam, quam Diapaſon, ſiue octauam appellant.

Etiam quantum ad iſtas tres proportionalitates optimum cenſeo aduertere ea, quæ à Clauio in Scholio Propoſ. *16*. lib. *6*. eruditiſſime proponuntur circa iſtas proportionalitates: quibus pro nunc breuitati ſtudendo relictis interuptam definitionum lib. *5*. expoſitionem denuo aggrediamur.

V.

V.

Magnitudines rationem inter ſe habere dicuntur, quæ multiplicatæ poſſunt ſeſe inuicem ſuperare.

EVclides in tertia definitione duarum magnitudinum eiuſdem generis habitudinem rationem vocauit, quam nos cum alijs quamplurimis proportionem dicimus: nunc vero idem Author in hac quinta definitione exponit quidnam requirant duæ quantitates eiuſdem generis ad hoc, vt inter ſe proportionem habere dicantur. Ait igitur, illas tantummodo magnitudines dici proportionem inter ſe habere, quarum vtraque multiplicata ita augetur, vt alteram tandem ſuperet; ſi vero alterutra quantumuis multiplicata numquam alteram excedat nullam proportionem inter ſe habere dicuntur. Hinc diameter, & latus quadrati dicuntur habere proportionem, licet irrationalem, quia latus per 2. multiplicatum diametrum excedit. E contra vero colligitur ex iſta definitione non ſolum inter lineam finitam, & infinitam, verum etiam inter angulum contactus, & angulum rectilineum, nullam dari proportionem, quia linea finita quomodocunque multiplicata nunquam poteſt ſuperare lineam infinitam, nec angulus contactus quantumuis multiplicatus, tamen ſemper minor exiſtit quouis angulo rectilineo etiam minimo, vt ad Prop. 16. lib. 3. demonſtratum fuit.

VI.

V I.

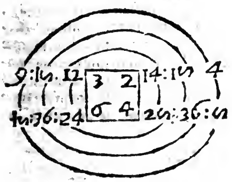
In eadem ratione dicuntur eſſe magnitudines, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ, & tertię æquæ multiplicia, à ſecundæ, & quartæ æque multiplicibus (qualiſcunque ſit hæc multiplicatio) vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedunt; ſi ea, quæ inter ſe reſpondent, ſumantur.

IN hac definitione Euclides exponit quaſnam conditiones apud Mathematicos requirant magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod totum efficit confugiendo ad earum æque multiplicia, vt comprehendat omnes magnitudinum proportiones, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, ſecunda; C, tertia; & D, quarta; ſumanturque primæ, & tertiæ æque multiplicia ſecundumquamcunque multiplicationem; E, quidem ipſius A, primæ; & F, ipſius C, tertiæ: Denuo ſumantur ſecundæ, & quartæ, alia æque multiplicia ſecundum quamlibet multiplicationem; G, quidem ipſius B, ſecundæ; & H, ipſius D, quartæ. Quo poſito, ſi ſumpta æque multiplicia, prout inter ſe reſpondent, conferantur, nempe multiplex primæ E, cum multiplici ſecundæ G; & multiplex tertiæ F, cum multiplici quartæ H; depreheñſumque fuerit ſecundum quaſcumque multiplicationes ea taliter inter ſe ſtare, vt ſi E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex ſecundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus ſit, quam H, multiplex, quartæ magnitudinis D: Aut ſi E, æqualis fuerit ipſi G; etiam F, æquale ſit

ipſi

ipſi H : aut denique, ſi E, maius fuerit quam G, etiam F, maius ſit quam H : quod totum nil aliud eſt quam vtrumque ab vtroque vel vna deficere, vel vna æqualia eſſe, vel vna excedere; hocque ſemper ſuccedat nec in vllio genere multiplicium contrarium poſſit reperiri. Quo ſtante dicetur eadem eſt proportio primæ magnitudinis A, ad ſecundam B; quæ eſt proportio tertiæ C, ad quartam D.

Similiter ſi quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedendum quoque erit, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere defectus, æqualitatis, aut exceſſus eandem conditionem, cum definitum, & definitio debeant ſemper reciprocari.



Quod totum vt melius intelligatur, placet vnum exemplum in numeris adducere, ex quo apparebit defectus, æqualitas; & exceſſus in ipſis multiplicibus, vt ſupra dictum eſt acceptis.

VII.

Magnitudines autem eandem rationem habentes, proportionales vocentur.

SI magnitudinum AB, CD, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D, iſtæ magnitudines proportionales dicentur.

VIII.

Cum vero æque multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

IN hac definitione Euclides declarat, quam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ita ut prima habeat ad ſecundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam, dicendo. Si primæ, & tertiæ ſumpta fuerint æquæ multiplicia; item ſecundæ, & quartæ alia æque multiplicia, deprehenſumq; fuerit aliquando (licet non ſemper) multiplex primæ maius eſſe multiplici ſecundæ, at multiplex tertiæ maius non eſſe multiplici quartæ, ſed vel minus, vel æquale, dicetur maiorem eſſe proportionem primæ magnitudinis ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam.

IX.

Proportio autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

ID, quod Euclides rationem nominat Interpretes proportionem vocant; illud vero, quod nomine proportionis ab ipſo Euclide appellatur, id ipſum Interpretes pariter Proportionalitatem vocant, vt etiam ſupra monuimus. Quoniam vero omnis proportio habet terminum antecedentem, & conſequentem; & cum proportionalitas ſit rationum ſimilitudo, neceſſe eſt in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, tres

tres terminos, ſi fuerit proportionalitas continua, & quatuor, ſi fuerit diſcreta.

X.

Cum vero tres magnitudines fuerint proportionales; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; Prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam; Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

PRo clariori intelligẽtia hujus definitionis eſt aduertendum, quod ſi fuerint magnitudines A,B,C,D, E, &c. continuè proportionales, itaut eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D, & D, ad E, proportio A, primæ magnitudinis ad C, tertiam magnitudinem dicetur duplicata eius proportionis, quam habet A, prima magnitudo ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, videlicet propoitio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, ideſt bis ordine poſitam. Inſuper ob andem rationem proportio primæ magnitudinis A, ad quartam D, dicetur triplicata eius proportionis, quam habet A, ad B, &c.

Aliqui interpretes exponunt hanc definitionem dicendo, quod in pluribus quantitatibus proportionalibus prima ad tertiam habet duplicatam rationem eius, quam habet ad ſecundam; quia illa iſtius ſit dupla; quod tamen falſiſſimum eſt. Quis namque affirmabit in iſtis numeris continue proportionalibus 25. 5. 1.

pro-

DE PROPORTIONE Multiplici.

PRoportio multiplex definitur, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem taliter aliquoties contines, vt minor metiatur maiorem. Hanc proportionem habet numerus 20. ad 4. ſiquidem 20. quinquies comprehendit 4. Quod pariter dicendum venit circa lineam 20. pedum ad lineam 5. pedum comparatam, &c.

Huiuſmodi proportio ſub ſe infinita continet genera; nam ſi in proportione multiplici maior quantitas minorem bis tantummodo contineat, dicitur proportio Dupla: ſi vero ter contineat, dicitur tripla, ſi quater quadrupla, ſi decies decupla, &c.

Hoc poſito facili negotio definiuntur ſpecies proportionis multiplicis; ſiquidem proportio tripla nil aliud eſt quam habitudo maioris quantitatis ad minorem taliter, vt maior ter minorem complectatur. Pariter proportio octupla eſt illa habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur, vt numerus 48. ad *6.* habet proportionem octuplam, quia octies ipſum *6.* continet. Quod totum valet etiam de reliquis ſpeciebus. Proportionis multiplicis.

DE

DE PROPORTIONE Superparticulari.

DEfinitur proportio Superparticularis, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, qua lò maior minorem ſemel dumtaxat continet, & inſuper vnam eius partem aliquotam, ſcilicet dimidiatam, 3.4 5. &c. Hanc proportionem habet numerus 3. ad 2. Nam numerus 3. ſemel continet 2; & inſuper vnitatem, quæ eſt pars dimidiata ipſius 2. Item linea 12. pedum ad lineam 9. pedum propoſitionem habet ſuperparticularem, quia ſcilicet prior linea ſemel continet poſteriorem, & inſuper lineam 3. pedum, quæ eſt 3. pars lineæ 9. pedum.

Hæc pariter proportio in infinita genera ſubdiuiditur. Nam ſi illa pars aliquota in maiori quantitate contenta eſt dimidiata pars minoris quantitatis, conſtituitur proportio ſeſquialtera; ſi autem eſt tertia pars, inſurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi centeſima, ſeſquicenteſima, &c. Vnde mediante hoc vocabnlo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuper particularium. Proportio enim ſeſquioctaua eſt quando maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris quantitatis: qualis eſt proportio inter 9. & 8: item inter 45. & 40. Siquidem 9. ſemel continet 8. & inſuper vnam vnitatem, quæ eſt octaua

 pars

pars ipſius 8: ſicuti etiam 45. ſemel continet 40. & inſuper 5. octaua pars ipſius 40.

DE PROPORTIONE Superpartiente.

SVperpartiens proportio definitur, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel dumtaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas non efficientes vnam aliquotam. Huiuſmodi proportionem habet numerus 8. ad 5. Siquidem numerus 8. ſemel continet 5. & inſuper tres vnitates, quarum quælibet eſt pars aliquota, nempe quinta huius numeri 5. Ipſe autem ternarius ex illis tribus vnitatibus compoſitus, non eſt pars aliquota ipſius numeri 5.

Et hic eſt aduertendum, quod in data definitione dictum fuit, partes illas aliquotas ſimul ſumptas non debere conſtituere vnam partem aliquotam, quia ſic diſtinguimus proportiones ſuperparticulares à ſuperpartientibus. Dantur enim quædam proportiones, quæ primo aſpectu videntur ſuperpartientes, cum tamen reuera ſint ſuperparticulares: vt patet inter numeros 10. & 8. Quamuis enim 10. ſemel contineat 8, & inſuper duas vnitates, quarum quælibet eſt octaua pars numeri 8; quia tamen illæ vnitates ſimul ſumptæ conſtituunt binarium, quod eſt quarta pars numeri 8, ideo iſta proportio non

eſt

eſt ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta.

Pariter huiuſmodi proportio ſuperpartiens habita ratione partium aliquotarum diuiditur in genera infinita: ſi enim maior quantitas minorem ſemel comprehendat, & duas eius partes aliquotas modo ſupra aſſignato, tunc conſurgit proportio ſuperbipartiens; ſi autem maior quantitates minorem ſemel comprehendat, & inſuper tres partes aliquotas, tunc conficitur proportio ſupertripartiens, &c.

Vlterius quodcunque ex aſſignatis generibus, habita ratione denominationis partium aliquotarum, adhuc diuiditur in genera infinita. Hinc eſt quod proportio Superbipartiens inter duas quantitas inæquales, quarum maior ſemel continet minorem, & duas eius partes tertias, dicitur ſuperpartiens tertias; & ſi illæ duæ partes fuerint quintæ appellabitur ſuperbipartiens quintas, &c.

Si autem quæratur quomodo cognoſci poſſit an vnus numerus habeat communem menſuram cum alio nec ne: Reſpondeo hac totum manifeſtari ab Euclide in lib. 7. in quo loco aſſignat regulam inueniendi communem menſuram numerorum, illoſque numeros, qui communem menſuram non habent præter vnitatem, vt 8. & 3. primos vocat.

DE PROPORTIONE Multiplici ſuperparticulari.

DEfinitur proportio multiplex ſuperparticularis, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Huiuſmodi proportio eſt, quam habet numerus 9. ad 4. Continet enim 9. bis 4. (& quo ad iſtam partem hæc proportio conuenit cum multiplici, nempe cum Dupla,) & vlterius comprehendit vnitatem, quæ eſt quarta pars numeri 4. (& quantum ad hoc iſta proportio conuenit cum ſuperparticulari, nempe ſeſquiquarta:) qua de re hæc proportio optime multiplex ſuperparticularis, ideſt ex multiplici, & ſuperparticulari reſultans, appellatur.

Diuiditur poſtea proportio iſta habita ratione proportionis multiplicis in genera infinita, eo prorſus modo, quo dictam eſt de multiplici nempe in duplam ſuperparticularem, triplam ſuperparticularem, &c. & inſuper vnam partem minoris aliquotam.

Denuo quodcunque ex aſſignatis generibus in infinita genera ſubdiuiditur, habita ſemper ratione proportionis ſuperparticularis: Nam proportio tripla ſuperparticularis continet ſub ſe

tri-

triplam ſeſquialteram, quando ſcilicet maior quantitas minorem ter contineat, & vlterius dimidiatam eius partem; triplam ſeſquitertiam, triplam ſeſquiquartam, &c.

DE PROPORTIONE Multiplici ſuperpartiente.

DEmum Proportio multiplex ſuperpartiens definitur, quod ſit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties minorem complectitur, & inſuper aliquot eius partes aliquotas non efficientes vnam aliquotam. Huiuſmodi proportionem habet numerus 11. ad 3. Nam 11. ter complectitur 3, & inſuper duas vnitates, quæ ſimul ſumptæ non conſtituunt vnam partem aliquotam, vt patet.

Diuiditur primò hæc proportio habita ratione proportionis multiplicis in duplam ſuperpartientem, triplam ſuperpartientem, quadruplam ſuperpartientem, &c.

Quodlibet poſtea iſtorum generum, habita ratione numeri partium, ſub ſe continet infinita genera. Vt v. g. ſub tripla proportione ſuperpartiente continetur tripla ſuperbipartiens, tripla ſupertripartiens, tripla ſuperquadripartiens, &c.

Demum quæcumque iſtarum proportionum habita ratione partium aliquotarum, in genera adhuc infinita ſubdiuiditur. Vt v. g. tripla ſupertripartiens diuiditur in triplam ſupertripar-

tientem quartas, in triplam ſupertripartientem quintas, 6. 7. 8. &c. Quarum proprias definitiones aſſignare ex dictis facile quicumque depromere poterit.

DE PROPORTION. Rationalibus minoris Inæqualitatis.

OMnia illa, quæ hactenus dicta ſunt de quinque proportionum rationalium generibus circa proportiones maioris inæqualitatis, ſunt pariter intelligenda circa quinque proportionum genera correſpondentia proportionibus minoris inæqualitatis, præmittendo ſolum præpoſitione, SVB; Nam ſi in adductis exemplis minores quantitates conferantur cum maioribus habebunt proportiones minoris inæqualitatis. Eo autem prorſus modo, quo ſe habet 100. ad 1, ita 1. ad 100. Hinc eſt, quod ex dictis prportio 100. ad 1, eſt centupla; ita 1. ad 100. eſt ſubcentupla; ſicque diſcurrendo de reliquis proportionum generib s.

Hæc ſunt illa genera, in quæ proportio Rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis diuiditur. Quod vero alia non poſſint aſſignari probant Authores, & præcipue Clauius, in hoc loco; & hæc compendioſe dicta ſufficiant circa quinque proportionum Rationalium genera, plura

plura cupiens Clauium conſulat, qui hanc materiam, & alias etiam quamplurimas ſapientiſſime expoſuit.

De Proportionalitatibus ab Euclide definitis.

PRoportionalitas ab Euclide definita in plura genera partitur, quorum præcipua hæc ſunt, videlicet Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, & Muſica, ſiue Armonica; quæ proportionalitatis genera à Boetio, & alijs vocantur medietates.

Arithmetica proportionalitas eſt quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur; vt ſunt iſti numeri 4, 7, 10, 13, 16, &c.

Geometrica vero proportionalitas eſt quando tres, vel plures numeri eandem habent proportionem, quam quidem Euclides definiuit, quia hæc propriè proportionalitas dicitur, ſiue Analogia. Vt v. g. iſti numeri 2, 6, 18, 54, &c. quilibet autem iſtorum numerorum ad ſuum antecedentem triplam habet proportionem, ac propterea huiuſmodi numeri dicuntur geometricè proportionales.

Demum proportionalitas Muſica, ſiue Harmonica eſt quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem ſit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentia

inter

inter duos minores. Vt v. g. hi tres numeri 3, 4, 6, in quibus eadem eſt proportio maximi numeri 6, ad minimum 3, quæ differentiæ inter maximũ 6, & medium 4, nimirum numeri 2, ad diferentiam inter medium 4, & minimum 3. ideſt 1. (cum vtraque proportio ſit dupla) conſtituunt proportionalitatem Muſicam, ſiue Harmonicam.

Huiuſmodi autem proportionalitas dicitur Muſica; quia plerumque eius numeri habent illas proportiones, in quibus conſiſtunt Muſicæ conſonantiæ, vt patet in adducto exemplo, nam inter 6, & 4, eſt proportio ſeſquialtera conſtituens conſonantiam, quæ Diapente, ſiue Quinta dicitur. Inter 4, & 3, eſt proportio ſeſquitertia conſtituens conſonantiam, quam Diateſſeron, ſeu quartam vocant. Demum inter extremos 6, & 3, cernitur proportio dupla conſtituens conſonantiam, quam Diapaſon, ſiue octauam appellant.

Etiam quantum ad iſtas tres proportionalitates optimum cenſeo aduertere ea, quæ à Clauio in Scholio Propoſ. 16. lib. 6. eruditiſſime proponuntur circa iſtas proportionalitates: quibus pro nunc breuitati ſtudendo relictis interuptam definitionum lib. 5. expoſitionem denuo aggrediamur.

V.

Magnitudines rationem inter ſe habere dicuntur, quæ multiplicatæ poſſunt ſeſe inuicem ſuperare.

EVclides in tertia definitione duarum magnitudinum eiuſdem generis habitudinem rationem vocauit, quam nos cum alijs quamplurimis proportionem dicimus: nunc vero idem Author in hac quinta definitione exponit quidnam requirant duæ quantitates eiuſdem generis ad hoc, vt inter ſe proportionem habere dicantur. Ait igitur, illas tantummodo magnitudines dici proportionem inter ſe habere, quarum vtraque multiplicata ita augetur, vt alteram tandem ſuperet; ſi vero alterutra quantumuis multiplicata numquam alteram excedat nullam proportionem inter ſe habere dicuntur. Hinc diameter, & latus quadrati dicuntur habere proportionem, licet irrationalem, quia latus per 2. multiplicatum diametrum excedit. E contra vero colligitur ex iſta definitione non ſolum inter lineam finitam, & infinitam, verum etiam inter angulum contactus, & angulum rectilineum, nullam dari proportionem, quia linea finita quomodocunque multiplicata nunquam poteſt ſuperare lineam infinitam, nec angulus contactus quantumuis multiplicatus, tamen ſemper minor exiſtit quouis angulo rectilineo etiam minimo, vt ad Prop. 16, lib. 3. demonſtratum fuit.

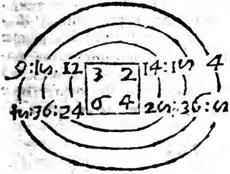
V I.

In eadem ratione dicuntur eſſe magnitudines, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ, & tertię æquæ multiplicia, à ſecundæ, & quartæ æque multiplicibus (qualiſcunque ſit hæc multiplicatio) vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedunt; ſi ea, quæ inter ſe reſpondent, ſumantur.

IN hac definitione Euclides exponit quaſnam conditiones apud Mathematicos requirant magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod totum efficit confugiendo ad earum æque multiplicia, vt comprehendat omnes magnitudinum proportiones, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, ſecunda; C, tertia; & D, quarta; ſumanturque primæ, & tertiæ æque multiplicia ſecundumquamcunque multiplicationem; E, quidem ipſius A, primæ; & F, ipſius C, tertiæ: Denuo ſumantur ſecundæ, & quartæ, alia æque multiplicia ſecundum quamlibet multiplicationem; G, quidem ipſius B, ſecundæ; & H, ipſius D, quartæ. Quo poſito, ſi ſumpta æque multiplicia, prout inter ſe reſpondent, conferantur, nempe multiplex primæ E, cum multiplici ſecundæ G; & multiplex tertiæ F, cum multiplici quartæ H; deprehenſumque fuerit ſecundum quaſcumque multiplicationes ea taliter inter ſe ſtare, vt ſi E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex ſecundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus ſit, quam H, multiplex, quartæ magnitudinis D: Aut ſi E, æqualis fuerit ipſi G; etiam F, æquale ſit ipſi

ipſi H : aut denique, ſi E, maius fuerit quam G; etiam F, maius ſit quam H : quod totum nil aliud eſt quam vtrumque ab vtroque vel vna deficere, vel vna æqualia eſſe, vel vna excedere; hocque ſemper ſuccedat nec in vllio genere multiplicium contrarium poſſit reperiri. Quo ſtante diceretur eadem eſt proportio primæ magnitudinis A, ad ſecundam B; quæ eſt proportio tertiæ C, ad quartam D.

Similiter ſi quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedendum quoque erit, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere defectûs, æqualitatis, aut exceſſûs eandem conditionem, cum definitum, & definitio debeant ſemper reciprocari.



Quod totum vt melius intelligatur, placet vnum exemplum in numeris adducere, ex quo apparebit defectus, æqualitas, & exceſſus in ipſis multiplicibus, vt ſupra dictum eſt acceptis.

VII.

Magnitudines autem eandem rationem habentes, proportionales vocentur.

SI magnitudinum AB, CD, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D, iſtæ magnitudines proportionales dicentur.

VIII.

Cum vero æque multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

IN hac definitione Euclides declarat, quam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ita ut prima habeat ad ſecundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam, dicendo. Si primæ, & tertiæ ſumpta fuerint æquæ multiplicia; item ſecundæ, & quartæ alia æque multiplicia, deprehenſumq; fuerit aliquando (licet non ſemper) multiplex primæ maius eſſe multiplici ſecundæ, at multiplex tertiæ maius non eſſe multiplici quartæ, ſed vel minus, vel æquale, dicetur maiorem eſſe proportionem primæ magnitudinis ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam.

IX.

Proportio autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

ID, quod Euclides rationem nominat Interpretes proportionem vocant; illud vero, quod nomine proportionis ab ipſo Euclide appellatur, id ipſum Interpretes pariter Proportionalitatem vocant, vt etiam ſupra monuimus. Quoniam vero omnis proportio habet terminum antecedentem, & conſequentem; & cum proportionalitas ſit rationum ſimilitudo, neceſſe eſt in omni proportionalitate reperiri, vt minimum,

tres

tres terminos, ſi fuerit proportionalitas continua, & quatuor, ſi fuerit diſcreta.

X.

Cum vero tres magnitudines fuerint proportionales; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; Prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam; Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

PRo clariori intelligẽtia hujus definitionis eſt aduertendum, quod ſi fuerint magnitudines A, B, C, D, E, &c. continuè proportionales, itaut eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D, & D, ad E, proportio A, primæ magnitudinis ad C, tertiam magnitudinem dicetur duplicata eius proportionis, quam habet A, prima magnitudo ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, videlicet proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, ideſt bis ordine poſitam. Inſuper ob andem rationem proportio primæ magnitudinis A, ad quartam D, dicetur triplicata eius proportionis, quam habet A, ad B, &c.

Aliqui interpretes exponunt hanc definitionem dicendo, quod in pluribus quantitatibus proportionalibus prima ad tertiam habet duplicatam rationem eius, quam habet ad ſecundam; quia illa iſtius ſit dupla; quod tamen falſiſſimum eſt. Quis namque affirmabit in iſtis numeris continue proportionalibus 25. 5. 1.

pro-

proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum illa iſtius ſit quintupla?

XI.

Homologæ, ſeu ſimiles ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

EVclides ſupra definiuit, proportionalitatem eſſe proportionum ſimilitudinem; nunc vero exponit, etiam terminos, ſeu quantitates dici ſimiles, vel homologas. Docet enim antecedentes magnitudines appellari homologas, ſeu ſimiles proportione inter ſe, nec non etiam conſequentes. Si enim eſt proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, ſimilis quantitati C; & B, ſimilis quantitati D. Cum enim habeant ſimilitudinem proportionum, neceſſe eſt etiam, vtramque magnitudinem antecedentem vtrique conſequenti eodem modo æqualem, maiorem, vel minorem exiſtere, vt in 6. defin. monuimus.

XII.

Alterna ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

IN hoc loco Præceptor explicat ſex modos argumentandi in proportionibus. Primus dicitur proportio alterna, ſeu permutata: Secundus, inuerſa, ſeu è contrario: Tertius, compoſitio rationis, ſeu coniuncta proportionalitas: Qartus, diuiſio rationis, vel diſiuncta proportionalitas: Quintus, conuerſio rationis, ſiue euerſa proportionalitas; Sextus demum, eſt proportio

tio ex æqualitate, ſeu æqua proportio.

Quantum igitur ad primum dicit Euclides, Alterna, ſeu permutata proportio eſt, cum poſitis quatuor magnitudinibus proportionalibus A, B, C, D, infertur eandem eſſe proportionem antecedentis A, ad antecedentem C; quam habet conſequens B, ad conſequentem D. Vnde Authores ſic formant huiuſmodi argumentationem; Si eſt vt A, ad B, ita C, ad D; igitur permutando, ſeu viciſſim erit vt A, ad C, ita B, ad D. Quod vero hæc argumentatio ſit bona ad Propoſ. 16. huius libri demonſtratur, dummodo tamen quatuor magnitudines ſint eiuſdem generis.

XIII.

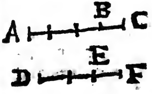
Inuerſa ratio, eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad conſequentem.

SI fuerint quatuor magnitudines proportionales A, B, C, D, hoc modo, vt A, ad B, ita C, ad D, & inferamus ita eſſe conſequens B, ad antecedentem A, vt conſequens D, ad aliud antecedens C; dicemur argumentari ab inuerſa proportione. Authores ſic formant iſtam argumentationem. Vt eſt A, ad B, ita C, ad D: igitur conuertendo, vel è contrario erit quoque B, ad A, vt D, ad C. Quam argumentationem bonam eſſe ad Coroll. propoſ. 4. huius libri oſtendendum erit.

XIV.

Compoſitio rationis, eſt ſumptio antecedentis cum conſequente,ceu vnius, ad ipſam conſequentem.

SIt proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; colligaturque eam pariter eſſe proportionem totius AB, & BC, ſimul, ad conſequentem BC, quam habet totum DF, ex DE, & EF, compoſitum, ad conſequentem EF; dicetur huiuſmodi argumentatio compoſitio rationis, ex eo quod ex antecedente & conſequente componatur aliud antecedens.



Hiſque verbis fit hæc argumentatio. Vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; ergo componendo erit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Bonitas huius argumentationis confirmatur in hoc lib. propoſ. 18.

Quo argumentandi modo addi poſſunt alij duo, quorum primus dicitur compoſitio rationis conuerſa; quando ſcilicet ſumitur antecedens, & conſequens, vt vna, quæ cum antecedente conferatur, dicendo. Si eſt vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; ergo eſt etiam AC, ex antecedente, & conſequente compoſita ad antecedentem AB, vt eſt DF, pariter ex antecedente, & conſequente conflata, ad antecedentem DE. Quam argumentationem eſſe validam ad Propoſ. 18. huius lib. demonſtrabimus; in qua hoc dicendi modo vti poterimus: Ergo per compoſitionem rationis conuerſam &c.

Alter poſtea modus dici poteſt, compoſitio rationis contraria; quando nimirum eadem magnitudo antecedens refertur ad antecedentem, & conſequentem, ceu ad vnam. Vt ſi eſt AB, ad BC, vt DE, ad EF, inferi-

Digitized by Google

ſerimus compoſitionem rationis contrariam; igitur erit vt AB, antecedens ad totam AC, ita DE, antecedens ad ipſam DF; quod pariter ad Propoſ. 18. huius oſtendetur.

XV.

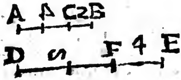
Diuiſio rationis, eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

VErbi gratia ſi dicatur, quæ proportio eſt totius AB, ad CB, eadem eſt totius DE, ad FE: igitur erit & exceſſus AC, (quo antecedens conſequentem ſuperat) ad CB, conſequentem, vt exceſſus DF, ad conſequentem FE. In hac argumentatione Authores ita loquentur: ergo diuidendo &c. Hæc illatio oſtendenda erit ad Propoſ. 17. huius lib.

XVI.

Conuerſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ſuperat ipſam conſequentem.

SI hoc modo argumentetur, Sicuti eſt tota magnitudo AB, ad CB, itá tota DE, ad FE: igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, exceſſum, vt DE, ad DF, dicemur per conuerſionem rationis argumentari. Vnde Authores ſic loquuntur, ergo per conuerſionem ratio-



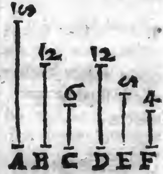
rationis &c. Qui modus argumentandi confirmatur in Coroll. Propoſ.19. huius libri.

XVII.

Ex qualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ſic & in ſecundis magnitudinibus prima ad vltimam ſeſe habuerit.

Vel aliter. Sumptio extremorum per ſubductionem mediorum.

Sint plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, ſintque binæ, & binæ in eadem ratione, hoc eſt A, ad B, vt D, ad E, & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur colligatur, propterea eam eſſe proportionem primæ magnitudinis A, ad tertiam C, quæ eſt D, quartæ ad F, ſextam; dicetur huiuſmodi argumentandi forma ex æquo, ſiue ex æqualitate, in qua ſcilicet extremæ magnitudines ſubductis medijs colliguntur habere vnam, eandemque proportionem inter ſe.



Quoniam vero duobus modis licet ex æqualitate arguere, videlicet ordinate procedendo, vel ordinem perturbando, Euclides duabus ſequentibus definitionibus exponit quid ſit ordinata, & quid perturbata proportio.

XVIII.

XVIII.

Ordinata proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam, vt conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

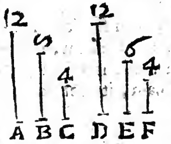
SI fuerit A, ad B, vt D, ad E; rurſuſque vt B, conſequens ad aliud quidpiam, nempe ad C, ita conſequens E, ad aliud quidpiam nempe ad F; dicetur talis proportio ordinata; quia idem ordo tam in primis, quam ſecundis magnitudinibus ſeruatur. Huiuſmodi argumentatio demonſtratur ad Propoſ. 22. huius lib.

XIX.

Perturbata autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & alijs, quæ ſint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſeqnentem: Vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI ſit quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; deinde vt in primis magnitudinibus B, conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad antecedentem E, tunc huiuſmodi proportio nuncupabitur perturbata, ex eo quod non ſer-

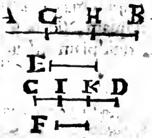
uetur idem ordo in magnitudinum proportionibus. Hanc eſſe optimam argumentationem in propoſ. 23. huius libri demonſtratur. Aduertẽdũ tamẽ eſt, proportionem tam ordinatam, quã perturbatam extremorum eandem proportionem ſemper inferre ex æqualitate, etiam ſi plus quam tres magnitudines proponantur, vt ex Propoſ. 22. & 23. huius libri fiet manifeſtum.



PROPOS. 1. THEOR. 1.

Si ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æquemultiplices; quam multiplex vnius eſt vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SI ſint quotcunq; magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines A B, C D, ſimul tam eſſe multiplices magnitudinum E, F, ſimul, quam eſt multiplex AB, ipſius E, vel CD, ipſius F. Prob. Cum enim AB, C D, ſint æque multiplices ipſarum E, & F, ſi AB, diuidatur in magnitudines A G, GH, HB, ipſi E, æquales, etiam CD, in magnitudines CI, IK, KD, ipſi F, æquales diuidetur; eruntque magnitudines C I, IK, KD, tot numero, quot ſunt magnitudines AG, GH, HB, quia tam multiplex eſt AB, ipſius E, quã multiplex eſt CD,



CD, ipſius F: Quoniam vero AG, & E, æquales ſunt inter ſe, ſi ipſis addantur æquales CI, & F, (a) erunt AG, CI, ſimul æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt GH, & IK, ſimul æquales ipſis E, & F, ſimul; Nec non etiam HB, & KD, ſimul ipſis E, & F, ſimul æquales erunt. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties etiam E, F, ſimul in AB, CD, ſimul comprehenduntur: Ideoque quam multiplex eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB, CD, ſimul ipſarum E, & F, ſimul, vt conſtat ex dictis in 2. defin. huius libri. Quare ſi ſint quoſcunque magnitudines, quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonſtrandum. a 2. pron.

SCHOLIVM.

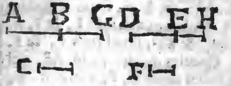
Hæc propoſitio in quacunque proportione ad propoſ. 12. huius libri demonſtatur; nempe tam in proportione rationali, quam irrationali.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Si prima ſecundæ æque fuerint multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem, & quinta ſecundæ æque multiplex atque ſexta quartæ; erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

SIt prima magnitudo AB, tam multiplex ſecundæ C, quam eſt multiplex tertia DE, quartæ F; rurſus tam multiplex ſit quinta BG, ſecundæ C, quam multiplex eſt ſexta EH, ipſius quartæ F. Dico primam AB, vna cum quinta BG, compoſitam, tam multiplicem eſſe ſecundæ C, quam multiplex eſt tertia DE, vna cum ſexta EH, compoſita, ipſius quartæ F.

Prob. Cum enim AB, DE, ſint æque multiplices ipſarum C, & F; erunt in AB, tot magnitudines æquales ipſi C, quot ſunt in DE, æquales ipſi F. Eadem ratione



erunt & in BG, tot magnitudines æquales ipſi C, quot ſunt in EH, æquales ipſi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales multitudines BG, EH, toties comprehendetur C, in AG, quoties F, in DH. Ideoque tam multiplex erit AB, prima compoſita cum quinta BG, ipſius ſecundæ C, quam multiplex eſt DE, tertia compoſita cum ſexta EH, ipſius quartæ F. Si itaque prima ſecundæ æque fuerit multiplex, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Hoc totum pariter concluditur ab Euclide in omni genere proportionis ad propoſ. 24. huius libri.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Si ſit prima ſecundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ; ſumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, ſumptarum vtraque vtriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ.

SIt prima magnitudo A, tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt tertia C, quartæ D, ſumanturque E, & F, æquemultiplices ipſarum A, & C, E, quidem ipſius A, & F, ipſius C, Dico ex æquo tam

tam multiplicem eſſe E, ipſius B, ſecundæ, quam multiplex eſt F, ipſius D, quartæ. Prob. Cum enim E, & F, ſint æquemultiplices



ipſarum A, & C; ſi diſtribuantur E, & F, in magnitudines ipſis A, & C, æquales, vt v. g. in EG, GH, HI, æquales ipſi A; & FK, KL, LM, æquales ipſi C; Erunt tot partes in E, æquales ipſi A, quot ſunt in F, æquales ipſi C. Quoniam vero E G, FK, æquales ſunt ipſis A, & C; ſunt autem A, & C, æquemultiplices ipſarum B, & D, ex hypotheſi: erunt & EG, FK, earundem B, D, æquemultiplices. Quoniam igitur EG, prima magnitudo tam eſt multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex FK, tertia, ipſius quartæ D: Item GH, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ſecundæ B, quam multiplex KL, ſexta eiuſdem quartæ D, (a) Erit & EH, compoſita ex prima, & quinta tam multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex FL, compoſita ex tertia, & ſexta, ipſius quartæ D. Rurſus cum ſit EH, prima tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt tertia F L, quartæ D, vt iam demonſtratum eſt: ſit autem & HI, quinta tam multiplex ſecundæ B, quam eſt L M, ſexta multiplex ipſius quartæ D: (b) erit & EI, compoſita ex prima, & quinta tam multiplex ſecundæ B, quam eſt FM, compoſita ex tertia, & ſexta ipſius quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in ipſis E, & F; ſi ergo prima ſecundæ æque ſit multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod oſtendendum erat.

a 2. quin.

b 2. quin.

SCHO-

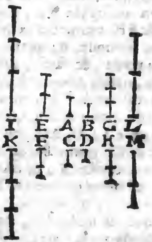
SCHOLIVM.

Hoc theorema non ſolum in magnitudinibus æquemultiplicibus, ſed etiam in omnibus proportionibus oſtendetur ad propoſ. 22. huius lib.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquemultiplices primæ, & tertiæ, ad æquemultiplices ſecundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

SIt proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſumanturque primæ A, & tertiæ C, æquemultiplices E, & F; Item ſecundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem: ſiue enim E, F, æque multiplices ſunt ipſarum A, C, ſicut G, H, ipſarum B, D, ſiue non. His poſitis conſtat ex def. 6. huius libri, ſi E, deficit à G, etiam F, deficit ab H; & ſi E, æqualis eſt ipſi G, etiam F, æqualem eſſe ipſi H; &



denique ſi E, excedit G, etiam F, excedere H; alioquin non eſſet eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, contra ſuppoſitum. Dico iam multiplicia primæ, & ter-

tertiæ non ſolum vna deficere à multiplicibus ſecundæ, ac quartæ, aut vna æqualia eſſe, aut vna excedere, vt diximus, ſed eandem quoque proportionem habere inter ſe, nimirum ita eſſe E, multiplex primæ A, ad G, multiplicem ſecundæ B, vt F, multiplex tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc eſt ſi rurſus, E, ſtatuatur prima magnitudo; G, vero ſecunda; F, tertia, & H, quarta; ſumanturque ipſarum E, F, æquemultiplicia qualiacunque; Item ipſarum G, H, alia quæcunque etiam æque multiplicia; Multiplicia ipſarum E, F, à multiplicibus ipſarum G, H, vel vna deficere, vel vna æqualia eſſe, vel vna excedere, prout vult defin. 6. Rurſus capiantur I, K, ipſarum E, F, æque multiplices; nec non etiam L, M, æque multiplices ipſarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex eſt E, prima ipſius A, ſecundæ quam F, tertia ipſius C, quartæ; ſumptæque ſunt I, & K, æque multiplices ipſarum E, F, primæ, ac tertiæ: (a) Erunt ex æquo I, K, æque multiplices ipſarum A, C, ſecundæ, & quartæ. Eadem prorſus ratione erunt L, M, ipſarum B, D, æquemultiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, ſecundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; oſtenſeque ſunt I, K, æque multiplices primæ, & tertiæ A, C; item L, M, æque multiplices ſecundæ, & quartæ B, D, (b) fit vt ſi I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici ſecundæ, etiam K, multiplex tertiæ neceſſario deficiat ab M, multiplici quartæ: & ſi I, æqualis eſt ipſi L, etiam K, neceſſario ſit æqualis ipſi M; & demum ſi I, excedit ipſum L, etiam K, neceſſario ipſam M, excedere debeat: Idemque oſtendetur in quibuſcunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F; nec non magnitudinum G, & H; quia ſemper hæc æquemultiplicia, quæcunque ſint, (c) æquemultiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & BD. Itaque cum I, & K, ſint æquemultiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æquemultiplices ſecundæ G, & quartæ H; oſtenſumque ſit, ſi I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex ſecundæ, multiplicem tertiæ

a 3. quin.

b 6. def. quin.

c 3. quin.

tiæ

tiæ K, minorem quoque eſſe, quam M, multiplicem quartæ; ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor; atque hoc totum contingere in quacunque multiplicatione:
d 6. def. quinti. (d) erit vt E, prima ad G, ſecundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si igitur prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

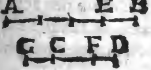
Ex modo dictis facile demonſtrabitur Inuerſa ratio, quam Euclides def. 13. explicauit; hoc eſt, ſi quatuor magnitudines fuerint proportionales, eaſdem è contra, ſeu inuerſa ratione proportionales eſſe. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico eſſe conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, & F, æquemultiplicibus ipſarum A, primæ, & C, tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus B, ſecundæ, & D, quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, ſecundam ſe habet vt C,
a 3. quin. tertia ad D, quartam, (a) neceſſario ſequitur ſi E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex ſecundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem eſſe, vel æqualem, vel maiorem, quam H, multiplicem quartæ: quo ſtante perſpicuum eſt ſi è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorē fore, vel æqualem, vel minorē, quā F, ſecundū quācunq; multiplicationē ſumpta fuerint hæc æque multiplicia. Si enim vtraque E, F, minor eſt, quam vtraque G, H, erit è contra vtraque G, H, maior quam vtraque E, F, &c. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D, ſumpta ſunt æque multiplicia G, H; item ſecundæ A, & quartæ C, æquemultiplicia E, F; oſtenſumque eſt G, H, vel vna excedere E, F, vel vna æqualia eſſe, vel vna deficere, ſecundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur;
b 6. def. quinti. (b) erit vt B, prima ad A, ſecundam, vt D, tertia ad C, quartam, Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ; Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITa multiplex ſit tota AB, totius CD, vt eſt multiplex ablata AE, ablatæ CF. Dico reliquam EB, ita eſſe multiplicem reliquæ FD, vt eſt tota AB, totius CD. Probatur. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuſpiam magnitudinis, videlicet ipſius GC, vt eſt AE, multiplex ipſius CF, vel tota AB, totius CD.



Quoniam igitur AE, EB, æque multiplices ſunt ipſarum CF, GC; (a) erit tota AB, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipſius CF, hoc eſt omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipſius CD, quam eſt multiplex AE, ipſius CF. Igitur AB, tam eſt multiplex ipſius CF, quam multiplex eſt ipſius CD; atque id circo (b) æquales ſunt GF, CD; ablata igitur communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipſius FD, quam multiplex eſt ipſius GC; Sed ita multiplex poſita fuit EB, ipſius GC, vt AE, ipſius CF, hoc eſt vt tota AB, totius CD. Quare tam multiplex eſt reliqua EB, reliquæ FD, quam eſt tota AB, totius CD. Si magnitudo ergo magnitudinis æque fuerit multiplex &c. Quod erat demonſtrandum.

a 3. qui.

b 6. pri.

SCHO-

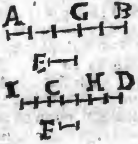
SCHOLIVM.

Hæc propoſitio vniuerſè demonſtrabitur Propoſ. 19. in qua magnitudines cuiuſcunque proportionis exhibentur.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & quædam detractæ ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

SInt magnitudines AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Prob. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG, eiuſdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipſi E, vel eius multiplex: alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici componeret multiplicem, quod eſt abſurdum.



Sit igitur primum GB, æqualis ipſi E. Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipſi F. Quia enim prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, quam tertia CH, multiplex eſt quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & CI, ſexta

ta æqualis eſt quartæ F; (a) Erit AB, prima cum quinta ita multiplex ſecundæ E, vt HI, tertia cum ſexta multiplex eſt quartæ F: Atqui CD, ipſius F, erat quoque tam multiplex, quam AB, multiplex eſt ipſius E. Æque multiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F. (b) Ideoque æquales inter ſe. Quare dempta communi CH, remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F; erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod eſt propoſitum. a 2. qui. b 6. prō.

Sit deinde GB, multiplex ipſius E. Dico ita quoque eſſe HD, multiplicem ipſius F. Poſita namque CI, ita multiplici ipſius F, vt eſt multiplex GB, ipſius E; (c) erit vt prius AB, ita multiplex ipſius E, vt eſt multiplex HI, ipſius F; quare iterum (d) æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, reliquæ etiam CI, HD, æquales erunt: Sed CI, eſt ita multiplex ipſius F, vt eſt GB, ipſius E, ex hypotheſi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipſius F, quam GB, ipſius E, quod eſt propoſitum. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquæ multiplices &c. Quod oſtendendum erat. c 2. quin. d 6. prō.

SCHOLIVM.

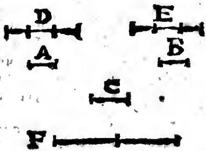
Hoc pariter oſtendetur Propoſ. 24. in omni genere proportionis.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Aequales ad eandem, eandem habent rationem: & eadem ad æquales.

Sint duæ magnitudines A, B, inter ſe æquales, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem pro-

proportionem ad C. Itemque viciſſim C, ad ipſas A, & B, eandem quoque proportionem habere. Prob. Sumantur enim D, E, æquemultiplices ipſarum æqualium A, B; (a) eruntque D, E, æquales inter ſe. Capiatur denuo F, vtcunque multiplex ipſius C. Quoniam



a 6. pri.

igitur D, E, æquales ſunt fit, vt vtraque, vel minor fit quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur. Quare cum D, E, æquemultiplices primæ A, & tertiæ B, minores ſint ipſa F, multiplici ſecundæ, & quartæ C, (eſt enim C, inſtar duarum magnitudinum) vel æquales, vel maiores, (b) erit ea proportio primæ, A, ad C, ſecundam, quæ tertiæ B, ad eandem C, quartam.

b 6. def. quinti.

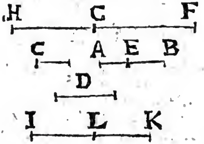
Eodem modo oſtendemus F, vel minorem eſſe vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ, ac tertiæ C, vna deficiat à D, & E, æquemultiplicibus ſecundæ A, & quartæ B; vel vna æqualis, vel maior; (c) erit quoque ea proportio primæ C, ad ſecundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod eſt propoſitum. Poſſet autem breuius oſtendi hæc ſecunda pars per coroll. 4. propoſ. ex inuerſa ratione. Cum enim iam ſit oſtenſum eſſe A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem; & eadem ad æquales. Quod erat demonſtrandum.

c 6. def. quinti.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Inæqualium magnitudinum maior adeandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

Sint inæquales magnitudines AB, maior, & C, minor, tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem eſſe proportione C, ad eandem D. Et è conuerſo maiorem eſſe proportionem D, ad minorem C, quam ad AB, maiorem. Prob. Intelligatur enim in maiore magnitudine AB, magnitudo AE, æqualis minori C, ſitque reliqua EB.



Deinde vtraque EB, AE, æqualiter multiplicetur hac lege, vt GF, multiplex ipſius EB, maior quidem ſit quam D; At HG, multiplex ipſius AE, non ſit minor eadem D; ſed vel æqualis, vel maior. Quoniam igitur duæ FG, GH, æquemultiplices ſunt duarum BE, EA; (a) erit & tota FH, ita multiplex totius AB, vt HG, a 1. qui.
ipſius AE, hoc eſt C, cum æquales ſint poſitæ C, & AE. Capiatur quoque ipſius D, multiplex IK, quæ proxime maior ſit quam HG. Abſciſa ergo LK, quæ æqualis ſit ipſi D, non erit IL, maior quam HG, (alias IK, non eſſet multiplex ipſius D, proxime maior quam HG; ſed & IL, maior quoque eſſet quam HG. Quod ſi IK, dupla ſit ipſius D, perſpicuum eſt IL, non eſſe maiorem quam HG, cum HG, poſita ſit minor quam

O D, hoc

D, hoc eſt quam IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipſi IL, vel maior. Et quia FG, maior eſt poſita quam D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG, maior quam LK. Cum ergo HG, non minor ſit quam IL, vt demonſtratum eſt, ſed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quam IK. Itaque cum FH, HG, ſint æquemultiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipſius D, quæ ad inſtar eſt ſecundæ, & quartæ: ſit autem FH, multiplex primæ maior quam IK, multiplex ſecundæ: at HG, multiplex tertiæ non ſit maior quam IK, multiplex quartæ, immo minor ex hypotheſi (ſumpta enim eſt IK, multiplex ipſius D, maior quam HG,) (a) erit maior proportio primæ AB, ad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

a 8. *def. quinti.*

Quoniam vero è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima, ac tertia; C, ſecunda; & AB, quarta) maior eſt quam HG, multiplex ſecundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non eſt quam FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, maior ſit, quam IK, vt oſtenſum eſt: (b) erit maior proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam; quod fuit propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

b 8. *def. quinti.*

PROPOS. 9. THEOR. 9.

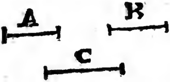
Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, hæ quoque inter ſe ſunt æquales.

HAbeant primum A, & B, eandem rationem ad C. Dico A, & B, eſſe inter ſe æquales. Sit enim, ſi fieri poteſt, altera, nempe A, maior, & B, minor;

(a) erit

(a) erit igitur maior proportio maioris A, ad C, quam minoris B, ad eandem C; quod eſt contra ſuppoſitum. Non ergo inæquales ſunt A, & B, ſed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B. Dico rurſus A, & B, eſſe æquales. Nam, ſi altera, nempe A, eſſet maior, & B, minor; (b) haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem; quod pariter eſſet contra hypotheſin. Non igitur maior erit A, quam B, ſed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod fuit demonſtrandum.

a8 quin.



b8.quin.

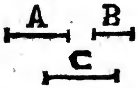
PROPOS. 10. THEOR. 10.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.

HAbeat in primis A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem eſſe quam B. Prob. Si enim A, foret ipſi B, æqualis, (a) haberent A, & B, eandem proportionem ad C; Si autem A, minor eſſet quam B, (b) haberet B, maior ad C, proportionem maiorem, quam A, minor ad eandem C, quod eſt contra ſuppoſitum. Non eſt igitur A, æqualis, vel minor quam B, ſed maior. Habeat ſecundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A, Dico pariter B, minorem eſſe quam A.

a7.quin.

b8.quin.

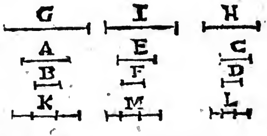


c 7. qui. Non enim æqualis erit B, ipſi A; (c) alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B, quod eſt contra hypotheſin. Neque vero B, maior erit quam A, (d) d 8. qui. alias haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem, quam ad B, maiorem; quod magis eſt contra ſuppoſitum. Minor igitur eſt B, quam A, quod eſt propoſitum. Ad eandem ergo magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 11. THEOR. 11.

Quæ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

SInt proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, eaſdem eſſe inter ſe ſecundum defin. 6. hoc eſt ſumptis æquemultiplicibus ipſarum A, C; item æquemultiplicibus ipſarum B, D, ſemper cõtingere, vt multiplices ipſarum A, C, a multiplicibus ipſarũ B, D, vel vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant.



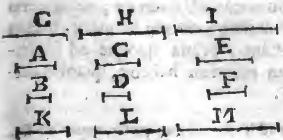
Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æquemultiplices quæcunque G, H, I; & ad omnes conſequentes B, D, F, aliæ quæcunque æquemultiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; (a) fit vt ſi G, multiplex primæ deficiat à K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplici quartæ: ſi æqualis, æqualis: ſi maior, maior: (b) Sed (vt eodem modo oſtendetur) ſi I, minor eſt,

eſt, quam M, vel æqualis, vel maior, eſt quoque H, minor, vel æqualis, vel maior quam L, propterea quod ponitur eſſe E, prima ad F, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare ſi G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice ſecundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab I, multiplice quartæ D. Et ſi G, æqualis eſt, vel maior, quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior, quam L. Idemque oſtendetur accidere in quibuſcunque alijs æquemultiplicibus. (c) Quapropter erit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Quod erat oſtendendum. c 6. def. quin.

PROPOS. 12. THEOR. 12.

Si fuerint quotcunq; magnitudines proportionales quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

ID quod Euclides in Propoſ. 1. huius libri de multiplici proportione demonſtrauit, oſtendit hic de omni genere proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, E, F, C, D, proportionales, hoc eſt ſit A, ad B, vt E, ad F, & C, ad D. Dico vt eſt vna antecedentium



tium ad vnum conſequentium, nimirum A, ad B, ita eſſe omnes antecedentes ſimul A, E, C, ad omnes conſequentes ſimul B, F, D. Probat. Sumptis enim G, I, H, æquemultiplicibus antecedentium; & K, M, L, æquemultiplicibus conſequentium; (a) erunt omnes G, I, H, ſimul omnium A, E, C, ſimul ita multiplices vt vna vnius, nempe vt G, ipſius A; & omnes K, M, L, ſimul omnium B, F, D, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipſius B. Quoniam vero ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; & vt E, prima ad F, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam; (b) ſit vt ſi G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplici ſecundæ B, deficiat quoque I, multiplex tertiæ E, ab M, multiplici quartæ F, & H, ab L; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel maior, æqualis quoque ſit I, ipſi M, & H, ipſi L, vel maior. Ac proinde ſi G, minor eſt, vel æqualis, vel maior, quam K, & omnes G, I, H, ſimul, omnibus K, M, L minores ſint, vel æquales, vel maiores. (c) Quocirca eſt vt A, prima ad B, ſecundam, ita A, E, C, tertia ad B, F, D, quartam. Si itaque ſint quotcunque magnitudines proportionales &c. Quod erat demonſtrandum.

a 1. qui.

b 6. def. quin.

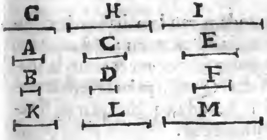
c 6. def. quin.

PLOPOS. 13. THEOR. 13.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

SIt A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam: ſit autem proportio tertiæ C, ad quartam D, maior quam quinta E, ad ſextam F. D co & pro-

proportionem A, primæ ad B, ſecundam eſſe maiorem quam E, quintę ad F, ſextam, ſecũdum definitionẽ 8. hoc eſt sũptis æquemultiplicibus ipſarum B, F, contingere poſſe, vt multiplex primæ A, excedat multiplicem ſecundæ B, at multiplex tertiæ E, non excedat multiplicem quartæ F. Sumptis enim G, H, I, æquemultiplicibus antecedentium; & K, L, M, æquemultiplicibus conſequentium, cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam; (a) ſit vt ſi G, multiplex primæ excesſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoquè H, multiplex tertiæ ipſam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, (b) non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit; vel minor; ex eo quod maior ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M. (c) Maior ergo eſt proportio A, primæ ad B, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quapropter ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.



a 6. *def. quinti.*

b 8. *def. quinti.*

c 8. *def. quinti.*

PROPOS. 14. THEOR. 14.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior quam quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ; ſi vero minor, & minor erit.

Sit enim A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, maior fuerit quam C, etiam B, maiorem fore quam D; ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Sit



a 8.qui. primum A, maior quam C, (a) quapropter proportio maioris A, ad B, maior erit quam proportio minoris C, ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem tertiæ A, ad quartam B, vt oſtenſum eſt, maior eſt quam quintæ C,
b 13.qui. ad ſextam B; (b) maior quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam.
c 10.qui. (c) Minor eſt ergo D, quam B; ideoque B, maior erit quam D. Quod eſt propoſitum.

d 7. qui. Sit deinde A, æqualis ipſi C, idcirco (d) erit A, ad B, vt C, ad D. Quoniam igitur proportiones C, ad
e 11.qui. D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, (e) erunt quoque inter ſe eædem proportiones C, ad D, &
f 9.qui. C, ad B. (f) Ideoque æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitum.

g 8. qui. Sit tertio A, maior quam C, (g) eritque propter hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; eſt autem pro-

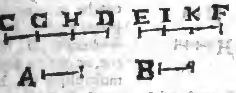
portio

portio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, ſexta. (h) Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam; (i) Ideoque B, minor erit quam D, quod eſt propoſitum. Si igitur prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum. h 13. qui. i 10. qui.

PROPOS. 15. THEOR. 15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuo reſpondent, ita ſumantur.

SInt partium A, & B, æquemultiplices CD, & EF. Dico ita eſſe CD, ad EF, vt A, ad B. Prob. Cum enim CD, & EF, ſint æque multiplices ipſarum A, & B, continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF.



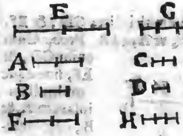
Diuidatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipſi A; & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipſi B; (a) eritque CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & A, nec non etiam EI, & B, æquales inter ſe ſint. Eademque ratione erit GH, ad IK, & HD, ad KF, vt A, ad B: (b) ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt CG, ad EI, hoc eſt vt A, ad B, (c) ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, ſimul ad omnes EI, IK, KF, ſimul: quod eſt propoſitum. Partes itaque cum pariter multiplicibus &c. Quod erat demonſtrandum. a 7. qui. b 8. qui. c 12. qui.

PRO-

PROPOS. 16. THEOR. 16.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

IN hoc loco demonſtratur alterna, ſiue permutata proportio, ſeu ratio, quæ explicata fuit defin. 12. huius libri. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſſim, ſeu permutando eſſe quoque A, ad C, vt B, ad D. Probatur. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ, & ſecundæ æquemultiplices E, & F; item ipſarum C, D, tertiæ, ac quartæ æque multiplices G, H,



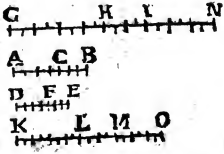
a 11. qui. (a) eritque E, ad F, vt A, ad B, cum E, & F, ſint pa-
riter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit
G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad
F, & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; (a)
erunt & ipſæ inter ſe eædem. Rurſus quia proportio-
nes E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C,
b 11. qui. ad D; (b) erunt & ipſæ eædem inter ſe; hoc eſt vt eſt
E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad A,
c 14. qui. quartam, (c) Quare ſi E, prima maior eſt quam G,
tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, ſecun-
da maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in
quacunque multiplicatione accepta ſint æque multi-
d 6. def. quinti. plicia E, & F, & æquemultiplicia G, H. (d) Eſt igi-
tur A, prima ad C, ſecundam, vt B, tertia ad D, quar-
tam (cum E, & F, ſint æquemultiplices primæ A, ac
ter-

tertiæ B; At G, & H, æquemultiplices C, ſecundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant &c.) quod eſt propoſitum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint &c. Quod oſtendendum erat.

PROPOS. 17. THEOR. 17.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuiſæ proportionales erunt.

HOc loco demonſtrat Euclides diuiſionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compoſitæ magnitudines AB, CD, & DF, FE, proportionales hoc eſt ſit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuiſas eaſdē proportionales eſſe, hoc eſt, vt eſt AC, ad CB, ita eſſe DF, ad FE, in illo ſenſu, quem defin. 6. expoſuimus. Capiantur enim ipſarum AC, CB, & DF, FE, æquemultiplices eodem ordine GH, HI, KL, LM; (a) eritque GI, ita multiplex ipſius AB, vt eſt GH, ipſius AC, hoc eſt vt KL, ipſius DF. Sed vt eſt multiplex KL, ipſius DF, (b) ita quoque multiplex eſt KM, ipſius DE. Ergo æquemultiplices ſunt GI, KM, ipſarum AB, DE. Capiantur rurſus in MO, æquemultiplices ipſarum CB,



a 1. quì.

b 1. quì.

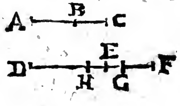
CB, FE. Quoniam igitur ſic eſt multiplex AI, prima ſecundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE: Item tam eſt multiplex IN, quinta ſecundæ CB, quam multiplex eſt
c 2. qui. MO, ſexta quartæ FE; (c) Erit & AN, ſic multiplex ſecundæ CB, vt LO, multiplex eſt quartæ FE. Itaque cum ſit AB, prima ad ſecundam CB, vt DE, tertia ad FE, quartam; ſumptæque ſint æque multiplices GI, KM, primæ, ac tertiæ AB, DE: Item ſecundæ, &
d 6. def. quinti. quartæ CB, FE æque multiplices HN, LO, (d) ſit vt ſi GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplici ſecundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE: & ſi æqualis, æqualis: ſi excedat, excedat. Quod ſi deficiat tam GI, ab HN, quam KM, ab IO, ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipſi IN, & KL, ipſi MO. Et ſi denique GI, exceſſerit ipſam HN, & KM, ipſam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipſam IN, & KL, ipſam MO. Quamobrem cum GH, KL, ſumptæ ſint æque multiplices primæ AC; & tertiæ DF: Item IN, MO, æque multiplices ſecundæ CB, & quartæ FE, oſtenſumque ſit (in quacunque multiplicatione illæ æquemultiplices fuerint acceptæ) æquemultiplices primæ, & tertiæ ab æquemultiplicibus ſecundæ, & quartæ, vel vna deficere, vel æquales eſſe, vel vna excedere; (e) erit AC,
e 6. def. quinti. prima ad CB, ſecundam, vt DF, tertia ad FE, quartam; quod fuit propoſitum. Si igitur compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

PRO-

PROPOS. 18. THEOR. 18.

Si diuiſæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

IN hoc loco Euclides demonſtrat compoſitionem rationis, quam definitione 14. deſcripſit. Sint enim diuiſæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc eſt AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico & compoſitas proportionales eſſe, hoc eſt vt AC, ad BC, ita eſſe DF, ad EF. Prob. Si enim non eſt vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF, ad aliquam magnitudinem minorem ipſa EF; vel maiorem eandem proportionem quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipſa EF, ſi fieri poteſt, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur eſt vt AC, ad BC, ita DF, ad GF: (a) Erit diuidendo, vt AB, ad BC, ita DG, ad GF: a 17. qui. ſed vt AB, ad BC, ita quoque poſita eſt DE, ad EF: (b) Igitur erit etiam vt DG, prima ad GF; ſecundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DG, b 11. quī. prima maior ſit quam DE, tertia; (c) erit quoque c 14. qui. GF, ſecunda maior quam EF, quarta, pars maior toto, quod eſt abſurdum.



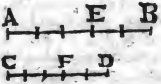
Iiſdem prorſus fundamentis demonſtrabitur abſurdum, nempe totum minus ſua parte, ſi dicatur DF, ad HF, maiorem ipſa EF, eandem habere proportionem, quam AC, ad BC. Cum enim DH, prima minor ſit quam DE, tertia; (d) erit quoque HF, ſecunda minor quam EF, quarta, totum minus parte d 14. quī. quod

quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ad minorem ipſa EF, aut ad maiorem eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 19. THEOR. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum ſe habebit, vt totum ad totum.

ID, quod in Propoſ. 5. demonſtratum eſt de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, eſſe ad reliquam FD, vt eſt tota AB, ad totam CD. Cum enim ſit AB, ad CD, vt AE, ad CF; (a) erit & permutando AB, ad AE,



a16.qui. vt CD, ad CF. (b) Diuidendo igitur erit EB, ad AE,
b17.qui. vt FD, ad CF. (c) Quare permutando rurſus erit EB,
c16.qui. ad FD, vt AE, ad CF, hoc eſt vt tota AB, ad totam CD, cum poſita ſit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex his facile demonſtrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui deſumitur à conuerſione rationis, iuxta 16. definitionem.

Sit

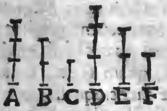
Digitized by Google

Sit enim vt AB, ad EB, ita CD, ad FD. Dico per conuerſionem rationis eſſe quoque vt AB, ad AE, ita CD, ad CF. Cum enim ſit, vt AB, ad EB, ita CD, ad FD; (a) Erit quoque diuidendo vt AE, ad EB, ita CF, ad FD. Igitur & conuertendo, vt EB, ad AE, ita FD, ad CF: (c) Ac propterea componendo quoque vt AB, ad AE, ita CD, ad CF. Quod fuit propoſitum. a17.qui. c18.qui.

PROPOS. 20. THEOR. 20.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; Ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam ſexta maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ; ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, ſitque A, ad B, vt D, ad E: & B, ad C, vt E, ad F; ſit autem primum A, prima maior, quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem F, ſexta. Cum enim A, maior ſit quam C, (a) erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Eſt autem vt A, ad B, ita D, ad E; maior igitur proportio quoque (b) erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita eſt F, ad E. (Cum enim ſit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur proportio etiam erit D, ad E, quam F, ad E. (c) Quare D, maior erit quam F. Quod fuit propoſitum. a 8. qui. b13.qui. c10.qui.



De-

Deinde ſit A, æqualis ipſi C. Dico & D, æqualem
a 7. qui. eſſe ipſi F. Cum enim A, ſit ipſi C, æqualis, (a) erit eadem proportio A, ad B, quæ C, ad B: eſt autem vt A, ad B, ita D, ad E. (b) Igitur erit & D, ad E, vt
b 15. qui. C, ad B; At vt C, ad B, ita eſt F, ad E, per inuerſam rationem, vt ſupra; Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E. (c) Ideoque æquales erunt D, & F. Quod
c 9. qui. eſt propoſitum.

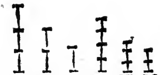
Demum ſit A, minor quam C. Dico & D, mino-
a 8. qui. rem eſſe quam F. Cum enim A, minor ſit quam C; (a) erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita D, ad E. (b) Minor quoque erit propor-
b 13. qui. tio D, ad E, quam C, ad B. Vt autem prius conuertendo eſt vti C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. (c) Ac
c 10. qui. propterea D, minor erit quam F. Quod eſt propoſitum. Si ſint itaque tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 21. THEOR. 21.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis; erit & quarta æqualis ſextæ; ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, ſitque perturbata earum proportio, hoc eſt, vt A, ad B, ita E, ad

E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E. Sit autem primo loco A, prima maior, quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem ſexta F. Cum enim A, maior ſit quam C, (a) erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: eſt autem vt A, ad B, ita E, ad F: (b) ergo maior quoque proportio eſt E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita eſt D, ad E, erit conuertendo, vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. (c) Ideoque maior erit D, quam F; quod eſt propoſitum.



a 8. *qui.*
b 13. *qui.*
c 10. *qui.*

Deinde ſit A, ipſi C, æqualis. Dico D, quoque ipſi F, eſſe æqualem. Cum enim A, ſit æqualis ipſi C; (d) erit A, ad B, vt C, ad B: ſed vt A, ad B, ita eſt E, ad F: eſt autem ex inuerſa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, vti prius. (e) Igitur erit quoque, vt E, ad F, ita E, ad D; (f) Atque idcirco D, ipſi F, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

d 7. *qui.*
e 11. *qui.*
f 9. *qui.*

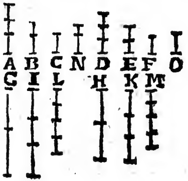
Sit tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem eſſe quam F. Cum enim A, ſit minor; (g) erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita eſt E, ad F; (h) minor ergo eſt proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ſupra, ex inuerſa ratione eſt vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam F, ad D; (i) Ac propterea D, minor erit quam F. Quod eſt propoſitum. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, &c. Quod oſtendendum erat.

g 8. *qui.*
h 13. *qui.*
i 10. *qui.*

PROPOS. 22. THEOR. 22.

Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero ęquales, quę binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IN hoc theoremate demonſtrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio eſt ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F; ſitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate eſſe A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, D, æquemultiplicibus G, & H: Itẽ ipſarum B, E, æquemultiplicibus I, K; item ipſarum C, F, æquemultiplicibus L, M. Cum enim ſit A, prima ad B, ſecundam, vt D, tertia ad E, quartam; (a) erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem ſecundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad k, multiplicem quarte E. Eadem ratione cum ſit B, prima ad C, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; (b) erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem ſecundæ C, vt k, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur ſunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres, H, k, M, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur; (c) fit vt ſi G, prima ſuperat tertiam L; ſuperet quoque neceſſario H, quarta ſextam M; & ſi æqua-



a 4. *qui.*

b 4. *qui.*

c 10. *qui.*

Digitized by Google

ſi æqualis, æqualis; & ſi deficiat, deficiat. Quare cum G,H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel vna deficiant ab L,M, æquemultiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel vna æquales ſint, vel vna excedant in quacunque multiplicatione ſumpta ſint ea multiplicia; (d) erit A, prima ad C, ſecundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod eſt propoſitum. d 6. def. quin.

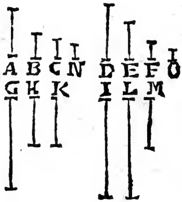
Deinde ſint plures magnitudines tribus, ita vt ſit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico etiam eſſe vt A, ad N, ita D, ad O. Cum enim ſupra ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, vt D, ad F: ponatur nunc C, ad N, vt F, ad O, erunt tres magnitudines A,C,N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur; ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, rurſus erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus per quatuor; ſicut idem in quatuor demonſtratum fuit per tres, &c. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat oſtendendum.

PROP. 23. THEOR. 23.

Si ſint tres magnitudines, aliæque ipſis numero æquales, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IN hoc theoremate demonſtratur ratio ex æqualitate, quando proportio eſt perturbata. Sint enim tres magnitudines A,B,C, & aliæ tres D, E, F, ſitque perturbata earum proportio, hoc eſt ſit vt A, ad B, ita

E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico pariter ex æqualitate eſſe vt A, ad C, ita D, ad F.



Sumptis namque ipſarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I: Item ipſarum C, E, F, æquemultiplicibus K, L, M, (a) erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, ſint ipſarum A, B, æquemultiplices. At vero vt A, ad B, ita eſt E, ad F; (b) igitur vt G, ad H, itaquoque eſt E, ad F: ſed vt E, ad F, (c) itaquoqúe eſt L, ad M; quod L, M, ſint ipſarum E, F, æquemultiplices. Igitur (d) erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rurſus quoniam eſt B, prima ad C, ſecundam, vt D, tertia ad E, quartam; (e) erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem ſecundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia ergo ſunt tres magnitudines G, H, k, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur; eſtq; earũ perturbata proportio; cum oſtenſum ſit eſſe vt G, ad H ita L, ad M; & vt H, ad k, ita I, ad L; (f) ſit vt ſi G, prima ſuperat tertiam k, ſuperet pariter quarta I, ſextam M; & ſi æqualis, æqualis; ſi minor, minor. Quare cum G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant; erit (g) vt A, prima ad C, ſecundam, ita D, tertia ad F, quartam, quod eſt propoſitum. Itaque ſi ſint tres magnitudines, &c. Quod erat oſtendendum.

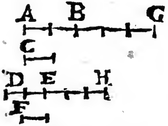
a 15. *qui.*
b 11. *qui.*
c 15. *qui.*
d 11. *qui.*
e 4. *qui.*
f 21. *qui.*
g 6. *def. quinti.*

PRO-

PROPOS. 24. THEOR. 24.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

ID, quod Propoſ. 2. demonſtrauit Euclides de ſola proportione multiplici, demonſtrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, ſecundam, vt DE, tertia ad F, quartam: Item BG, quinta ad C, ſecundam, vt EH, ſexta ad F, quartam. Dico ita eſſe AG, compoſitam ex prima, ac quinta, ad ſecundam C, vt eſt DH, compoſita ex tertia, & ſexta, ad quartam F. Cum enim ſit vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur eſt AB, ad C, vti DE, ad F; & C, ad BG, vt F, ad EH; (a) erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. (b) Componendo igitur erit vt tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rurſus ſit AG, ad BG, vt DH, ad EH: & BG, ad C, vt EH, ad F: (c) Erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F. Quod eſt propoſitum. Si ergo prima ad ſecundam eandem habuerit rationem &c. Quod erat demonſtrandum.

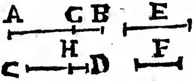


a 22. *qui.*
b 18. *qui.*
c 22. *qui.*

PROPOS. 25. THEOR. 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: Maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIt enim AB, ad CD, vt E, ad F, ſitq; AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, ſimul eſſe maiores duabus CD, & E, ſimul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipſi E: & ex CD, alia CH, æqualis ipſi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc eſt vt AB, ad CD. Quare cum ſit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH:



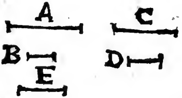
a 19. qui. Erit quoque (a) vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Eſt autem AB, cum ſit omnium maxima, maior quam CD: igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales ſunt, ſi ipſis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipſi AG, & CH, ipſi E; fient AG, & F, ſimul æquales ipſis E, & CH, ſimul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, ſimul maior quam E, & CD, ſimul, cum GB, ſit maior quam HD. Quod eſt propoſitum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint &c. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOS. 26. THEOR. 26.

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam maiorem proportionem, quam quartam ad tertiam.

HAbeat enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem eſſe proportione D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior proportione E, ad B; (a) ac propterea A, maior erit quam E. (b) Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt eſt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C: igitur proportio B, ad A, minor quoque eſt quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.

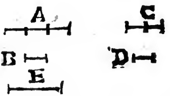


a 10. qui.
b 8. qui.

PROPOS. 27. THEOR. 27.

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoq; viciſſim prima ad tertiam maiorẽ proportionem, quam ſecunda ad quartam.

SI enim A, ad B, habeat maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem quo-



que eſſe proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur itaque exiſtere E, ad B, vt C, ad D, eritque proportio A, ad B, maior etiam, quam E, ad B: (a) Ideoque A, erit maior quam E. (b) Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. (c) Quoniam vero permutando eſt vt E, ad C, ita B, ad D, (cùm poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit, quam B, ad D, Quod eſt propoſitum.

a 10. qui.
b 8. qui.
c 16. qui.

PROPOS. 28. THEOR. 28.

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam.

SIt maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem eſſe proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur autem eſſe



GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC. (a) Ideoque AB, maior quam GB. Addita ergo communi BC, fiet AC, maior quam GC; (b) ac propterea maior erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, (c) vt eſt GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF, (quia poſita fuit GB, ad BC,

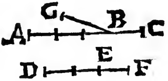
a 10. qui.
b 8. qui.
c 18. qui.

BC, vt DE, ad EF.) Ergo maior etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod fuit propoſitum.

PROPOS. 29. THEOR. 29.

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIt maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem eſſe AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur autem eſſe GC, ad BC, vt DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, maior quoque proportione GC, ad BC: (a) ideoq; maior erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC; maior erit AB, quam GB: (b) Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC: (c) Sed diuidendo, vt eſt GB, ad BC, ita eſt DE, ad EF. (poſita namque eſt GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod fuit propoſitum.



a 10. qui.

b 8. qui.

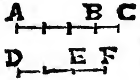
c 17. qui.

PRO-

PROPOS. 30. THEOR. 30.

Si compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda, ad primam minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

SIt maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuerſionem rationis, minorem eſſe proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim ſit minor proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF; (a) erit & diuidendo maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. (b) Quare conuertendo minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE: (c) Ac propterea & componendo minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.



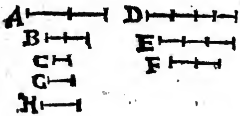
a 29. qui.
b 26. qui.
c 28. qui.

PRO-

PROPOS. 31. THEOR. 31.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.

SInt tres magnitudines A, B, C, & aliæ numero æquales D, E, F, ſitque maior proportio A, ad B, quam D, ad E: Nec non etiam maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque eſſe proportionem A, ad C, quam D, ad F. Concipiatur enim eſſe G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea



proportio B, ad C, maior quam G, ad C; (a) Ideoque B, maior erit quam G. (b) Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quam A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Ergo multo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Quo ſtante denuo intelligatur eſſe H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; (c) Ideoque A, maior erit, quam H. (d) Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: (e)

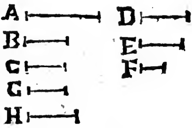
a 10. *qui.*
b 8. *qui.*
c 10. *qui.*
d 8. *qui*

c 22. qui. C: (c) Sed vt H, ad C, ita eſt ex æqualitate D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita eſt H, ad G, & vt E ad F, ita G, ad C.) Quare maior quoque proportio erit A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.

PROPOS. 32. THEOR. 32.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ numero æquales D, E, F, ſitque maior proportio A, ad B, quam E, ad F. Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico eſſe quoque ex qualitate maiorem proportionem A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur autem eſſe G, ad C, vt D, ad E; eritque proportio B, ad



a 10. qui. b 8. qui. C, maior quam G, ad C: (a) Ideoque B, maior erit, quam G. (b) Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quam eiuſdem A, ad B, maiorem: Eſt autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior eſt proportio A, ad G, quam E, ad F. Quo poſito intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt E, ad F; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H,

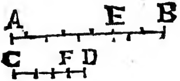
ad

ad G: (c) Ideoque maior erit A, quam H. (d) Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C: (e) At vt H, ad C, ita eſt ex æqualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita eſt G, ad C; Et vt E, ad F, ita eſt H, ad G.) Maior ergo eſt etiam proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum. c 10. qui. d 8. qui. e 23. qui.

PROPOS. 33. THEOR. 33.

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

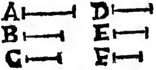
SIt maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablati AE, ad ablatum CF. Dico etiam proportionem reliquæ EB, ad reliquum FD, maiorem eſſe, quam totius AB, ad totum CD. Cum enim maior ſit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF, (a) erit quoque permutando maior proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; (b) ac propterea per conuerſionem rationis minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD; (c) permutando igitur minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc eſt EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod eſt propoſitum. a 27. qui. b 30. qui. c 27. qui.



PROPOS. 34. THEOR. 34.

Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, ſitque maior proportio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundę ad ſecundam: & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam: ſicque deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem proportionem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta pariter prima: Minorem autem, quam prima priorum ad primam poſteriorum: denique maiorem etiam, quam vltima priorum ad vltimam poſteriorum.

SInt primo loco tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſit autem maior proportio A, ad D, quam B, ad E: Item maior B, ad E, quam C, ad F. Dico portionem ipſarum A, B, C, ſimul ad ipſas D, E, F, ſimul maiorem eſſe proportione B, C, ſimul, ad ipſas E, F, ſimul: Minorem vero proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim maior ſit proportio A, ad D, quam B,



a16. quī. ad E; (a) erit permutando maior A, ad B, quam D,
b18. quī. ad E; (b) igitur componendo, maior erit proportio ipſarum A, B, ſimul, ad B, quam ipſarum D, E, ſimul
c16. quī. ad E; (c) permutando igitur rurſus, maior erit proportio A, B, ſimul ad D, E, ſimul, quam B, ad E. Itaque

que cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; (d) habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius BC, ad totam E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius, ad totam E, F. (e) Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; (f) & componendo ergo maior eſt proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. (g) Et rurſus permutando, maior proportio omnium A, B, C, ſimul ad omnes D, E, F, ſimul, quam B, C, ad EF. Quod fuit primo loco propoſitum.

d 33. qui. e 27. qui. f 28. qui. g 27. qui.

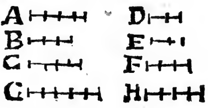
Quare cum ſit maior proportio totius A, B, C, ad totam D E, F, quam ablatæ B, C, ad ablatam E, F; (h) erit etiam maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F. Quod eſt ſecundum.

h 33. qui.

Quoniam vero maior eſt proportio B, ad E, quam C, ad F; (i) erit permutando maior quoque B, ad C, quam E, ad F; (k) Et componendo, maior totius B, C, ad C, quam totius E, F, ad F: (l) & rurſus permutando, maior B, C, ad E, F, quam C, ad F. Eſt autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt oſtendimus, quam B, C, ad E, F; multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam vltimæ C, ad vltimam F. Quod eſt tertium.

i 27. qui. k 28. qui. l 27. qui.

Deinde ſint quatuor magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales cum eadẽ hypotheſi, nempe ſit maior proportio tertiæ C, ad tertiam F, quam quartæ G, ad quartam H. Dico eadem conſequi. Vt enim iam in tribus eſt oſtenſum,



maior eſt proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H.

Multo

multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H, (m) permutando ergo minor erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H; (n) & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H; (o) & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H. Quod erat propoſitum.

m 17 *qui.* n 18. *qui.* o 17. *qui.*

Quapropter cum ſit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H. (p) Erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quod eſt ſecundum.

p 33. *qui.*

Quoniam vero, vt in tribus demonſtratum fuit, maior eſt proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H, vt oſtenſum fuit; multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam vltimæ G, ad vltimam H. Quod eſt tertium.

Demum eodem modo concludi poteſt, eadem conſequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in ſex per quinque &c. quemadmodum oſtendimus in quatuor per tres. Quare conſtat totum hoc Theorema &c.

Quinti Elementi finis.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.

I.

SImiles ſunt figuræ rectilineæ, quæ & ſingulos angulos ſingulis angulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

POſtquam Euclides in Libro Quinto explicationem proportionum in quantitatibus continuis genericè, nullatenus deſcendendo ad aliquã ſpeciem quantitatis, abſoluit, in hoc 6. libro ſpecifice oſtendit quamnam proportionem inter ſe habeant lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, aliæque figuræ planæ. Quod vt facilius exequatur.

In primis dicit quod figuræ rectilineæ ſunt illæ, quæ habent angulos inter ſe æquales, & inſuper latera circa ipſos æquales angulos proportionalia. Vt v. g. triangula ABC, Q DEF,

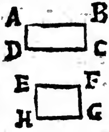


DEF, tantummodo ſimilia dicentur, ſi fuerint æquiangula, itaut angulus A, angu'o D; & B, ipſi E; & C, ipſi F, æqualis ſit: Nec non etiam latera circa æquales angulos proportionalia, hoc eſt vt AB, ad AC, ita DE, ad DF; & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.

II.

Reciprocæ figuræ ſunt cum in vtraque figura antecedentes, & conſequentes rationum termini fuerint.

VT exempli gratia ſi in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita fuerint proportionalia lateribus EF, FG, vt in vtroque parallelogrammo ſit & antecedens, & conſequens diuerſarum proportionum, hoc eſt ea ſit proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC. In hoc enim caſu AB, antecedens primæ rationis eſt in vno parallelogrammo, & EF, conſequens in alio; & rurſus FG, antecedens alterius rationis reperitur in illo parallelogrammo, in quo poſuimus conſequentem alterius rationis; & conſequens BC, ſtat in alio parallelogrammo, in quo ſtabat antecedens prioris proportionis. Quare in vtroque parallelogrammo reperitur antecedens, & conſequens rationum, ac proinde reciproca erunt. Quod idem etiam valet de triangulis; nam in alijs figuris reciprocarum figurarum non eſt vſus apud Geometras.

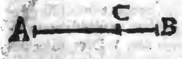


III.

III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cum vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ad minus ſe habuerit.

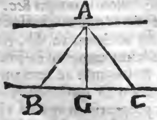
SI recta aliqua linea AB, ita diuidatur in C, inæqualiter vt quemadmodum tota AB, ad maius ſegmentum AC, ita maius ſegmentum AC, ad minus ſegmentum CB, huiuſmodi linea dicetur diuiſa ſecum extremam, & mediã rationem. Hanc diuiſionem exponet Euclides Propoſ. 30. huius libri, eamque propoſuit, licet alijs verbis, in ſecundo lib. Propoſ. 11. Innumeræ quidem ſunt vtilitates lineæ taliter ſectæ vt conſtat ex libris Stereometriæ, vnde iuremerito hæc diuiſio vocari ſolet Diuina proportio.



IV.

Altitudo cuiuſcunque figuræ eſt linea perpendicularis à vertice ad baſin deducta.

IN triãgulo ABC, vertex ſit A, à quo ad baſin BC, perpendicularis ducatur AG, dicetur hæc perpendicularis altitudo triãguli ABC, ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum ABC, quanta eſt perpendicularis AG.



V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVoniam denominator cuiuslibet proportionis exprimit quãtà ſit magnitudo antecedens ad conſequentem (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. oſtendit in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere conſequentem ; denominator vero proportionis ſub quadruplæ, nempe vnum quart. indicat antecedentem eſſe quartam partem conſequentis &c.) Dici ſolet denominator à Geometris, ſeu quantitas proportionis. Quapropter hæc definitio vult, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, ſeu quantitates inter ſe multiplicatæ effecerint illam proportionem, ſeu illius proportionis denominatorem. Vt v. g. proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & ſextupla ; quandoquidem denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe 2. in denominatorem ſextuplæ, hoc eſt in 6. Eadem prorſus ratione proportio trigecupla dicitur componi ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter ſe multiplicati gignunt 10. illius denominatorem &c.

Vnde quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus (vt dictum eſt ad defin. 10. lib. 5.) proportio primæ ad vltimam dicitur componi ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam &c. Sic etiam in quibuſcunque magnitudinibus ordine poſitis proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad ſecun-

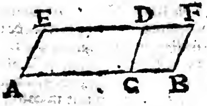
eandam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam &c. donec proportio extiterit; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam conſurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis.

Hoc totum confirmatur à Clauio in hoc loco adducendo varias antiquorum demonſtrationes circa hanc materiam: Quas demonſtrationes apud citatum authorem legere haud inutile erit.

VI.

Parallelogrammum ſecundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam ſit ea, ſecundum quam applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, conſtituatq; cum eo totum vnum parallelogrammum.

SIt data recta linea AB, ſupra quam conſtituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, ſed deſit CB; ductaq; BF, parallela ipſi CD, coeatque cum ED, producta in F, ſicq; compleatur totum parallelogrammum AFE. Quo poſito parallelogrammum AD, ſe-



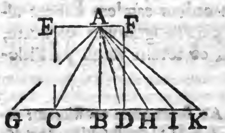
cundum rectam AB, applicatum, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, appelletur defectus.

E contra vero ſit data recta A C, ſupra quam conſtituatur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB, maius data recta AC, ducanturque lineæ vt ſupra. Parallelogrammum igitur AF, ſecundum rectam A C, applicatum, excedere dicitur parallelogrammo DB, ſicque DB, vocatur exceſſus.

PLOPOS. I. THEOR. I.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, inter ſe ita ſe habent, vt baſes.

SInt duo triangula ABC, ABD, eandem habentia altitudinem, quorum baſes ſint BC, BD. Item duo parallelogramma BE, BF, eiuſdem altitudinis, quorum eædem baſes BC, BD. Dico ita eſſe triangulum ABC, ad triangulum ABD, & parallelogrammum BE, ad parallelogrammum BF, vt eſt



baſis BC, ad baſin BD Hoc eſt ſi baſis BC, ſtatuatur prima magnitudo, & baſis BD, ſecunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum BE, tertia, & triangulum ABD, vel parallelogrammum BF, quarta, æquemultiplicia primæ, ac tertiæ ab æquemultiplicibus ſecundæ, & quartæ, vel vna deficere, vel vna æqualia eſſe, vel vna excedere, vt oſtenſum fuit in defin. 6. lib. 5. Ponantur enim tam triangula, quam parallelogramma inter eaſdem parallelas EF, GK, ſicque vt dictum

dictum eſt in defin. 6. huius libri, triangula, & parallelogramma eandem habebunt altitudinem, cum perpendiculares ad baſes demiſſæ æquales exiſtant. Rurſus ex BG, ſumantur quotcunque rectæ (licet in noſtra figura vna tantum ſumatur) æquales ipſi BC, & ſit CG: Item ex BK, abſcindantur quotcunque rectæ DH, HI, IK, æquales ipſi BD. Deinde à puncto A, ducantur rectæ AG, AH, AI, AK. (a) Erunt igitur triangula ABC, ACG, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas æqualia. Eademque ratione æqualia erunt triangula BAD, DAH, HAI, IAK. Quam multiplex ergo eſt recta GB, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum BAG, trianguli BAC: & quam multiplex eſt recta BK, rectæ BD, tam quoque multiplex erit triangulum BAK, trianguli BAD, quia in tot triangula æqualia ſunt diuiſa tota triangula ABG, ABK, in quot rectas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ BG, BK. Quoniam vero ſi baſis BG, æqualis fuerit baſi BK, (b) neceſſario triangulum ABG, æquale erit triangulo ABK, ac proinde ſi BG, maior fuerit quam BK, neceſſario ABG, maius erit quam ABK, & ſi minor, minus erit; proptereaque deficient vna BG, recta, & triangulum ABG, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab BK, recta triangulo BAK, æquemultiplicibus ſecundæ BD, & quartæ BAD, vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, ſi ea, quæ inter ſe reſpondent, ſumantur. (c) Quare quæ proportio eſt primæ BC, ad ſecundam BD, baſis ad baſin, ea erit tertiæ BAC, ad quartam BAD, trianguli ad triangulum. Sicut igitur baſis ad baſin, ita eſt triangulum ad triangulum; quod fuit propoſitum.

a 38. pri.

b 38. pri.

c 6. defi. quin.

Quoniam vero (d) vt triangulum ABC, ad triangulum ABD, ita eſt parallelogrammum BE, (e) (duplum enim eſt trianguli ABC,) ad parallelogrammum BF, quod pariter eſt duplum trianguli A B D, vnde perſpicuum eſt (f) ita quoque eſſe parallelogrammum ad parallelogrammum, vt baſis ad baſin. Quod totum confirmari poteſt eodem argumento, quo vſi

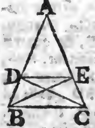
d 15. qui.
e 34. pri.
f 11. quin.

ſumus in triangulis, ſi prius ex punctis C,G, rectæ ducantur parallelæ ipſi BA; necnon ex punctis H,I,K, parallelæ ipſi BA, &c. Triangula igitur, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera: Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

IN triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, ſecta eſſe proportionaliter in D, & E, hoc eſt, eſſe vt AD, ad DB, ita AE, ad EC.



a 37. pri. Ductis namque rectis CD, BE, (a) erunt triangula BDE, CED, ſuper eandem baſin DE, & inter eaſdem parallelas DE, BC, conſtituta inter ſe æqualia. (b) Quare vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita eſt idem triangulum ADE, ad triangulum EDC: (c) Atqui vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita eſt baſis AD, ad baſin BD; (cum hæc triangula ſint eiuſdem altitudinis, vt conſtat ſi per E, parallela agatur ipſi AB.) Eademque ratione vt triangulum ADE, ad triangulum EDC, ita eſt baſis AE, ad baſin EC. (d) Vt igitur AD, ad BD, ita eſt AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem ſint proportioni trianguli ADE, ad triangulum

b 7. qui.

c 1. ſex.

d 11. qui.

Digitized by Google

ſum DEB, & eiuſdem trianguli ADE, ad triangulum EDC.) Quod eſt propoſitum.

Secet deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam eſſe reliquo lateri BC. Ductis enim, vt ſupra, rectis CD, BE, (e) erit vt baſis AD, ad baſin DB; ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum ſint eiuſdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC: (f) igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC: Sed (g) vt baſis AE, ad baſin EC, ita eſt triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum pariter ſint eiuſdem altitudinis: (h) Igitur vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita eſt idem triangulum ADE, ad triangulum DEC. (i) Æqualia ergo ſunt triangula BDE, DEC; ac propterea cum eandem habeant baſin DE, (k) erunt inter eaſdem parallelas conſtituta. Quare parallela eſt DE, ipſi BC: quod eſt propoſitum. Si igitur ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

e 1. ſexti.
f 11. quin.
g 1. ſex.
h 11. quin.
i 9. qui.
k 39. pr.

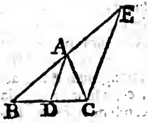
PROPOS. 5. THEOR. 5.

Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin; baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad ſectionem producitur, bifariam ſecat angulum ipſius trianguli.

IN triangulo ABC, recta AD, ſecet primo angulum BAC, bifariam. Dico eſſe vt BA, ad AC, ita

BD,

BD, ad DC. Agatur enim per C, recta CE, parallela
ipſi DA, donec cum BA, pariter producta concurrat
in E, puncto; (debent autem coire CE, & BA, quia
anguli B, & BCE, minores ſunt duobus rectis: ſiqui-
dem cum duo anguli ABD, BDA, in triangulo ABD,
a 17. pri. (a) ſint minores duobus rectis; & angulus BDA, (b)
b 29. pri. ſit æqualis interno, & oppoſito BCE; erunt etiam duo
anguli B, & BCE, minores
duobus rectis: quare iuxta de-
fin. 13. lineæ CE, BA, tandem



c 29. pri. coibunt) (c) eritque angulus
ECA, æqualis alterno CAD;
& angulus E, externo DAB;
æqualis erit. Cum igitur duo
anguli CAD, DAB, per con-
ſtructionem æquales ponantur,
d 6. pri. erunt & anguli ECA, & E, inter ſe æquales; (d) ideo-
e 7. qui. que & rectæ AC, AE, inter ſe æquales; (e) Vt igitur
f 2. ſex. EA, ad AB, ita CA, ad eandem AB. (f) Atqui vt
EA, ad AB, ita eſt CD, ad DB, cum in triangulo EBC,
g 11. qui. recta AD, ſit parallela lateri CE: (g) Igitur vt CA,
ad AB, ita CD, ad DB; quod fuit propoſitum.

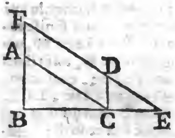
Sit deinde vt CA, ad AB, ita CD, ad DB. Dico re-
ctam AD, biſariam ſecare angulum CAB. Prob. Quo-
h 2. ſex. niam enim vt CA, ad AB, ita ponitur CD, ad DB; (h)
Vt autem CD, ad DB, ita eſt EA, ad AB, (quod in
triangulo CEB, recta AD, ducta ſit parallela lateri
i 11. qui. CE,) (i) erit vt CA, ad AB, ita EA, ad eandem AB;
k 9. qui. (k) æquales igitur ſunt EA, & AC, ac propterea an-
l 5. pri. guli E, & ACE, (l) inter ſe æquales erunt (m)
m 29. pri. Cum igitur angulus ACE, æqualis ſit alterno CAD,
& angulus E, pariter æqualis externo DAB; erunt &
duo anguli CAD, DAB, æquales inter ſe. Quod eſt
propoſitum. Quare ſi trianguli angulus biſariam ſe-
ctus ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos; & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC, DCE; ſintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC, CDE. Dico eſſe AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED; & denique CA, ad AB, vt ED, ad DC; Ita enim latera circa æquales angulos ſunt proportionalia, homologaque ſunt ea latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur, hoc eſt, & antecedentia omnia æquales reſpiciunt angulos, & conſequentia ſimiliter. Conſtituantur latera BC, CE, ſecundum lineam rectam BE, ita vt



angulus DCE, externus ſit æqualis interno ABC; pariterque externus ACB, interno DEC, ſit æqualis: Et quia duo anguli ABC, ACB, (a) minores ſunt duobus rectis: eſt autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt anguli B, & E, duobus rectis minores. (b) Quare rectæ BA, ED, productæ verſus partes A, & D, coibunt. Producantur ergo & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, æqualis eſt interno, & oppoſito ABC, (c) parallelæ erunt CD, & BF. Eademque ratione parallelæ erunt CA, & EF, quod angulus externus ACB, ſit æqualis interno DEC. Parallelogrammum eſt igitur ACDF, (d) proptereaque recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, æqualis re-

a 17. pri.
b 13. pri.
c 28. pri.
d 34. pri.

ctæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta
e 2. ſex. AC, parallela eſt lateri EF, (e) erit AB, ad AF, hoc
f 16. qui. eſt ad DC, (quæ æqualis eſt ipſi AF,) vt BC, ad CE.
Permutando igitur (f) erit AB, ad BC, vt DC, ad
CE. Rurſus quia in eodem triangulo BEF, recta
g 2. ſex. CD, parallela eſt lateri BF, (g) erit BC, ad CE, vt
FD, hoc eſt CA, (quæ æqualis eſt ipſi FD,) ad ED.
h 16. qui. Permutando igitur, (h) erit BC, ad CA, vt CE, ad
ED. Cum igitur ſit AB, ad BC, vt DC, ad CE; &
i 22. qui. BC, ad CA, vt CE, ad ED; (i) erit ex æquali AB, ad
CA, vt DC, ad ED. Quod eſt propoſitum. Aequiangulorum ergo triangulorum proportionalia ſunt latera, &c. Quod erat demonſtrandum.

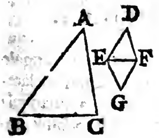
COROLLARIVM.

Ex his patet, lineam rectam, quæ in triangulo vni lateri parallela ducitur, auferre triangulum ſimile toti triangulo. Si enim in triangulo BEF, lateri BF, parallela ducatur CD, erit triangulum DCE, toti triangulo BEF, ſimile. Nam æquiangula ſunt, cum anguli BFE, FBE,
a 29. pri. (a) æquales ſint angulis CDE, DCE, externis; & angulus E, communis. Rurſus cum, vt demonſtratum eſt habeant latera circa æquales angulos proportionalia, per primam defin. huius libri ſimilia erunt triangula FBE, & DCE.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Si duo triangula latera habeant proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus & homologa latera ſubtenduntur.

DVo triangula ABC, DEF, habeant latera proportionalia, ſitque AB, ad BC, vt DE, ad EF; & BC,



& BC, ad CA, vt EF, ad FD; & denique AB, ad AC, vt DE, ad DF. Dico huiuſmodi triangula eſſe æquiangula, angulum ſcilicet A, æqualem eſſe angulo D, & angulum B, angulo E; & demum angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales reſpiciunt latera homologa.

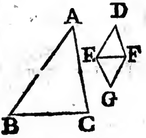
His poſitis fiat angulus FEG, (a) æqualis angulo B, & angulus EFG, angulo C, conueniantque rectæ EG, FG, in G, puncto (b) eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis: Æquiangula igitur ſunt triangula ABC, EGF; (c) Quare vt AB, ad BC, ita eſt GE, ad EF; vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF: (d) Igitur vt GE, ad EF, ita eſt DE, ad EF: ac propterea (e) æquales erunt rectæ GE, DE. Rurſus quoniam (f) vt BC, ad CA, ita eſt EF, ad FG: Vt autem BC, ad CA, ita eſt EF, ad FD; (g) erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; (h) ideoque æquales erunt FD, FG. Quare cum latera EG, FG, æqualia ſint lateribus DE, DF, vtrunque vtrique, & baſis EF, communis; (i) Erunt anguli G, & D, æquales; (k) ac propterea etiam reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis ſit angulo A, erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus EFD, angulo C, æqualis erit; quod fuit propoſitum. Si ergo duo triangula latera habeant proportionalia &c. Quod erat demonſtrandum.

a 23. pri.
b 32. pri.
c 4. ſex.
d 11. qui.
e 9. qui.
f 4. ſex.
g 11. qui.
h 9. qui.
i 8. pri.
k 4. pri.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint; æquiangula erunt triangula, æqualeſque habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.

IN triangulis ABC, DEF, duo anguli B, & E, ſint inter ſe æquales, ſintque latera A B, B C, proportionalia lateribus D E, EF, hoc eſt ſit A B, ad B C, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales eſſe, angulum ſcilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F: Ita enim æquales anguli homologa reſpiciunt latera. Vt in antecedenti demonſtratione angu-



lo B, fiat æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus E F G; quo ſtante, vt in antecedenti propoſitione dictum fuit, erit triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare (a) vt AB, ad BC, ita eſt GE, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. (b) Igitur vt DE, ad EF, ita eſt GE, ad eandem EF; atque idcirco DE, GE, (c) æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia ſint lateribus GE, EF, & quoque anguli ab ipſis contenti æquales (nam angulo B, cui factus eſt æqualis angulus FEG, æqualis eſt poſitus angulus DEF, quare æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF,) (d) erunt reliqui anguli D, & EFD, reliquis angulis G, & EFG, æquales. Cum ergo angulus G, ſit æqualis angulo A; & angulus EFG, angulo C,

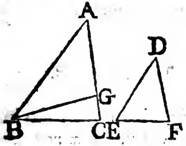
a 4. ſex.
b 11. qui.
c 9. qui.
d 4. pri.

lo C; erunt etiam angulis A, & C, æquales anguli D, & EFD; ob idque æquiangula erunt triangula ABC, DEF; quod fuit propoſitum: Si ergo duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero ſimul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.

SInt duo triangula ABC, DEF, ſitque angulus A, in triangulo ABC, æqualis angulo D, in triangulo DEF; & rurſus latera AB, BC, circa angulum ABC, proportionalia lateribus DE, EF, circa angulum DEF, hoc eſt ſit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, hac tamen conditione, vt quilibet reliquorum angulorum, ſit minor recto, vel non minor. Dico æquiangula eſſe triangula, angulos ſcilicet ABC, & E, circa quos ſunt latera proportionalia, & angulos C, & F, æquales eſſe. Probat. Sit enim primum tam angulus C, quam F, recto minor. Quo poſito ſi anguli ABC, & E, non ſunt æquales, ſit ABC, maior quam E; fiatque ipſi E, æqualis ABG; Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, (a) erit, & reliquus



a 32. pri.

liquus AGB, reliquo F, æqualis; ideoque triangula AGB, DEF; æquiangula erunt. Quare vt AB, ad
b 4. ſex. BG, (b) ita DE, ad EF: Sed vt DE, ad EF, ita po-
c 11. qui. nitur AB, ad BC: (c) Vt igitur AB, ad BG, ita eadem
d 9. qui. AB, ad BC; (d) ac propterea æquales erunt BG, &
e 5. pri. BC, & (e) propterea anguli BGC, BCG, æquales. Cum igitur angulus C, ponatur recto minor, erit & angulus BGC, recto minor; ideoque ei deinceps GBA,
f 13. pri. recto maior; (f) cum BGA, BGC, anguli ſint duobus rectis æquales. Eſt autem oſtenſus angulus AGB, angulo F, æqualis. Maior igitur recto eſt pariter angulus E: ſed poſitus eſt etiam recto minor, Quod eſt abſurdum.

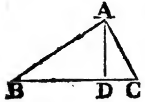
Sit deinde tam angulus C, quam F, recto non minor, eritque vt ſupra angulus C, angulo BGC, æqualis; quare etiam BGC, recto non minor erit; ac propterea anguli BCG, BGC, in triangulo GBC, non minores erunt duobus rectis, ſed vel maiores, vel æquales duo-
g 17. pri. bus rectis; quod eſt abſurdum; (g) ſunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales ſunt anguli ABC,
h 32. pri. & E, ſed æquales; (h) atque idcirco reliqui etiam anguli C, & F, æquales erunt; quod eſt propoſitum. Quare ſi duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit; quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſunt ſimilia.

IN triangulo BAC, angulus BAC, ſit rectus, à quo ad baſin perpendicularis agatur AD. Dico triangula

gula ADB, ADC, ſimilia eſſe, & toti triangulo ABC, & inter ſe. Prob. Cum enim in triangulis ABC, ADB, anguli BAC, BDA, ſint recti, & angulus B, communis; (a) erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Aequiangulum igitur eſt triangulum DBA, triangulo ABC, (b) ac propterea habent latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc eſt, erit vt CB. ad BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita BD, ad DA; & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult 4. propoſ. huius libri. Quare ſimile eſt triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem prorſus modo oſtendetur, triangulum ADC, ſimile eſſe eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, ADC, ſunt recti, & angulus C, communis; (c) c propterea reliqui anguli ABC, DAC, æquales. Quare (d) vt BC, ad CA, ita eſt CA, ad CD; & vt CA, ad AB, ita CD, ad DA; & vt CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic enim quoque opponuntur homologa latera æqualibus angulis ſecundum præſcripta in 4. propoſ. huius libri. Haud ſecus demonſtrabitur ſimilia inter ſe eſſe triangula ADB, ADC, cum anguli EDB, ADC, ſint recti; & anguli ABD, CAD, oſtenſi æquales; nec non anguli BAD, DCA; Atque idcirco ſit vt BD, ad DA, (e) ita AD, ad DC; & vt DA, ad AB, ita DC, ad CA; & vt AB, ad BD, ita CA, ad AD; ſi igitur in triangulo rectangulo ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 32. pri.
b 4. ſex.
c 32. pri.
d 4. ſex.
e 4. ſex.

COROLLARIVM.

Ex hac propoſitione manifeſtum eſt, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo in baſin demittitur, eſſe mediam proportionalem inter duo baſis ſegmenta:

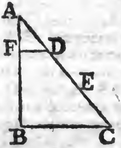
Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium medium proportionale eſſe inter totam baſin, & illud ſegmentum baſis, quod ei lateri adiacet.

Oſtenſum enim fuit, eſſe vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, mediam eſſe proportionalem inter BD, & DC. Nec non etiam oſtenſum fuit eſſe vt CB, ad BA, ita BA, ad BD; & idcirco BA, mediam eſſe proportionalem inter CB, & BD: Et denique eſſe vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, mediam exiſtere proportionalem inter BC, & CD. Quod fuit propoſitum.

PROPOS. 9. PROBL. 1.

A data recta linea imperatam partem auferre.

IMperetur vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunque faciens angulum BAC; & poſtea ex AC, indefinite producta abſcindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda ex AB, vt in propoſita figura tres ſunt AD, DE, EC; deinde ex C, ad B, recta ducatur CB, cui per D, parallela agatur DF. Quo facto dico DF, eſſe partem tertiam ipſius rectæ AB. Prob. Nam cum in triangulo ABC, lateri CB,



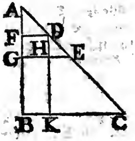
a 2. ſex. b 18. qui. ducta ſit parallela DF; (a) erit vt CD, ad DA, ita BF, ad BA. (b) Componendo igitur vt CA, ad AD, ita BA, ad AF: ſed AC, eſt tripla ipſius AD, per conſtructionem; Igitur & BA, ipſius AF, tripla erit; quare AF, erit tertia pars ipſius AB, vnde pars quæſita. A data ergo recta linea imperatam partem abſtulimus. Quod faciendum erat.

PRO-

PROPOS. 10. PROBL. 2.

Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit.

Sit data recta AB, ſecanda ſimiliter, vt ſecta eſt recta AC, in D, & E; hoc eſt in partes, quæ ſunt partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad punctum A, facientes angulum quemcunque BAC, connectanturque inſimul recta BC. Deinde ex D, & E, agantur DF, EG, rectæ parallelæ ipſi BC.



Dico rectam AB, ſimiliter eſſe ſectam in F, & G, vt eſt ſecta AC, in D, & E. Prob. Nam (a) vt AD, ad DE, ita eſt AF, ad FG; proportionales ergo ſunt partes AF, FG, partibus AD, DE, Quod ſi ducatur DK, ipſi FB, parallela ſecans EG, in H, puncto; (b) erit rurſus vt DE, ad EC, ita DH, ad HK, hoc eſt ita FG, ad GB, (cum DH, HK, æquales ſint duabus FG, GB, per 34. propoſ. lib. primi). Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio erit de pluribus partibus, ſi ex E, & C, ipſi AB, parallelæ agantur, &c. Quare datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecuimus, vt data altera recta ſecta fuit. Quod erat faciendum.

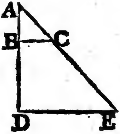
a 2. ſex.

b. 2. ſex.

PROPOS. 11. PROBL. 3.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem ad inuenire.

Sint duæ rectæ AB, AC, ita diſpoſitæ vt efficiant angulum A, quemcunque, ſitque illis inuenienda tertia proportionalis. hoc eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad aliam tertiam. Producatur AB, quam antecedentem ſtatuimus, & capiatur BD, æqualis ipſi AC, quæ conſequens, & media eſſe debet. Deinde ducta recta BC, agatur ex D, linea DE, parallela ipſi BC, occurrens ipſi AC, productæ in E. Dico CE, eſſe tertiam proportionalem, hoc eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo DAE, lateri DE, parallela ducta ſit recta

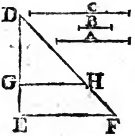


a 2. ſex. BC: (a) erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: (b) ſed
b 7. qui. vt AB, ad BD, ita eſt eadem AB, ad AC, cum AC, poſita ſit æqualis ipſi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE; quod eſt propoſitum. Duabus ergo datis rectis lineis tertiam proportionalem ad inuenimus, Quod erat faciendum.

PROPOS. 12. PROBL. 4.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

SInt tres lineæ rectæ A, B, C, quibus inuenienda ſit quarta proportionalis, hoc eſt ſicut A, ad B, ita C, ad aliam quartam. Diſponantur duæ priores lineæ taliter, vt componant inſimul lineam rectam DE, tertia vero C, cum prima A, hoc eſt DG, faciat quemcunque angulum, nempe D, ſitque recta DH, ipſi C, æqualis. Poſtea ex G, ad H, ducatur linea GH, cui per E, ducatur parallela EF, occurrens rectæ DH, productæ in F. Dico HF, eſſe quartam proportionalem, hoc eſt vt DG, ad GE, ita DH, ad HF. Prob. Cum enim in triangulo EDF, lateri EF, ducta ſit parallela GH; (a) erit vt DG, ad GE, ita DH, ad HF. Quare HF, quarta eſt proportionalis; quapropter tribus datis rectis lineis, quarta proportionalis inuenta fuit. Quod erat faciendum.



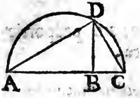
a 2. ſext.

PROP. 13. PROBL. 5.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem adinuenire.

SInt duæ rectæ AB, BC, quibus inuenienda eſt media proportionalis. Datæ duæ rectæ diſponantur ſecundum rectam lineam AC; quæ biſariam diuiſa ſu-

per ipſam conſtituatur ſemicirculus ADC, ita vt tota AC, ſit diameter. Deinde ex B, ad AC, erigatur perpendicularis BD, vſque ad periferiam. Dico BD, eſſe mediam proportionalem inter AB, & BC. Prob. Ductis enim rectis AD, CD; erit angulus ADC, (a) rectus eſt enim in ſemicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, ad baſin AC, ducta ſit perpendicularis DB, erit per Coroll. Propoſ. 8. huius lib. media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

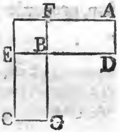


a 31. ter.

PROPOS. 14. THEOR. 9.

Aequalium parallelogrammorum, & vnum vni æqualem habentium angulum, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt latera. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

Sint duo æqualia parallelogramma AFBD, ECGB, habentia angulos DBA, EBG, æquales. Dico latera circum hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt eſſe vt DB, ad BE, ita GB ad BF. Coniungantur enim dicta parallelogramma iuxta æquales angulos, ita vt DB, & BE, conſtituant vnam lineam rectam. Quo poſito, cum anguli DBF, GBE, ponantur æquales, (a) erunt etiam



a 15. pri.

etiam GB, BF, vna recta linea. Producantur modo AF, & CE, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia ſunt parallelogramma AB, BC, (b) erit vt AB, ad FE, ita BC, ad idem FE: ſed vt AB, ad FE, (c) ita eſt baſis DB, ad baſin BE, (ſunt enim parallelogramma eiuſdem altitudinis) ſimiliterque vt CB, ad EF, ita eſt baſis GB, ad baſin BF. Igitur vt DB, ad BE, ita GB, ad BF. Quod eſt propoſitum quantum ad primam partem. b 7. quí. c 1. ſex.

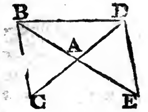
E conuerſo ſint latera circa æquales angulos DBF, GBE, reciproca, hoc eſt vt DB, ad BE, ita GB, ad BF. Dico parallelogramma AB, BC, eſſe æqualia. Facta namque eadem conſtructione; cum ſit vt DB, ad BE, ita GB, ad BF: vt autem DB, ad BE, (d) ita parallelogrammum AB, ad parallelogrammum FE: & vt GB, ad BF, ita parallelogrammum CB, ad idem EF: erit quoque vt AB, ad FE, ita CB, ad idem FE. (e) Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma AB, BC. Aequalium ergo parallelogrammorum, & vnum vni æqualem habentium angulum &c. Quod erat demonſtrandum. d 1. ſex. e 9. quí.

PROPOS. 15. THEOR. 10.

Aequalium triangulorum, & vnum vni æqualem habentium angulum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia.

SInt duo triangula æqualia ABC, ADE, habentia angulos BAC, DAE, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt eſſe vt EA, ad

AB, ita CA, ad AD. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt EA, & AB, componant vnam lineam rectam. Quo facto cum anguli BAC, DAE, ſint æquales, (a) erunt etiam CA, AD, vna recta linea. Ducta igitur recta DB: quoniam enim æqualia ſunt triangula BAC, DAE, (b) erit vt BAC, ad BAD, ita DAE, ad idem BAD; ſed vt triangulum BAC, ad triangulum BAD, (c) ita eſt baſis CA, ad baſin AD, cum hæc triangula ſint eiuſdem altitudinis: ſimiliterque vt DAE, ad DAB, ita eſt baſis EA, ad baſin AB. Quare vt CA, ad AD, ita eſt EA, ad AB. Quod fuit propoſitum.



a 15. pri.

b 7. qui.

c 1. ſex.

Iam vero è conuerſo, ſint latera circa æquales angulos, qui ad A, reciproca, nempe CA, ad AD, vt EA, ad AB. Dico triangula BAC, DAE, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione, cum ſit vt CA, ad AD, ita EA, ad AB; vt autem CA, ad AD, (d) ita triangulum BAC, ad triangulum BAD: & vt EA, ad AB, ita triangulum EAD, ad idem triangulum BAD; Erit vt BAC, ad BAD, ita EAD, ad idem BAD, (e) ac propterea æqualia erunt triangula ABC, DAE. Æqualium igitur triangulorum, & vnum vni &c. Quod erat oſtendendum.

d 1. ſex.

e 9. qui.

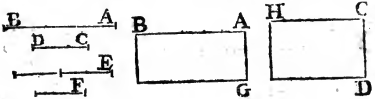
PRO-

Digitized by Google

PROPOS. 16. THEOR. 11.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales BA, DC, E, & F; hoc eſt vt BA, ad DC, ita E, ad F: ſitque re-



ctangulum BG, comprehenſum ſub extremis BA, & F; rectangulum vero HD, comprehenſum ſub medijs DC, & E. Dico rectangula BG, HD, eſſe æqualia. Cum enim anguli recti A, & C, ſint inter ſe æquales, & ſit vt BA, ad CD, ita HC, ad AG; erunt latera circa æquales angulos A, & C, reciproca: quare parallelogrammum (a) BG, æquale erit parallelogrammo HD. Quod eſt propoſitum. a 14. ſex.

Contra vero ſint iam æqualia rectangula BG, HD. Dico quatuor rectas lineas BA, CD, HC, AG, eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe vt BA, ad CD, ita HC, ad AG. Cum enim æqualia ſint rectangula BG, HD, habeantq; angulos æquales A, & C, nempe rectos, (b) b 14. ſex.

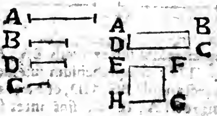
erunt

erunt latera circa hoſce angulos reciproca; ſicut quidem BA, ad CD, ita AC, ad AG. Quare ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. 17. THEOR. 12.

Si tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod à media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt tres lineæ rectæ A, B, & C, proportionales: vt quidem A, ad B, ita B, ad C: ſitque rectangulum AC, contentum ſub extremis A B, BC: & quadratum mediæ EF, ſit EG. Dico æqualia inter ſe eſſe rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta D, quæ æqualis ſit ipſi EF, erunt quatuor lineæ A, B, D, C, proportionales; vt quidem A, ad B, ita D, ad C; eritque quadratum E G, comprehenſum ſub medijs B, & D, propter æqualitatem rectarum B, & D, (a) Quapropter rectangulum AC, comprehenſum ſub extremis A, & C, æquale eſt quadrato EG, hoc eſt rectangulo ſub medijs B, & D, comprehenſo: quod eſt propoſitum.



a 16. ſex.

Sint

Sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico eſſe vt A, ad B, ita D, ad C. Cum enim æqualia ſint rectangula AC, & EG; (b) erit vt AB, b ad EF, ita FG, ad BC: (c) Vt autem FG, ad BC, ita c eſt B, ipſi D, æqualis, ad eandem C. Quare vt A, ad B, ita eſt B, ad C. Si tres igitur rectæ lineæ ſint proportionales &c. Quod erat demonſtrandum.

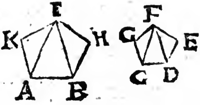
COROLLARIVM.

Ex poſteriori huius propoſ. parte deducitur, quamlibet rectam lineam eſſe mediam proportionalem inter quaſuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale.

PROPOS. 18. PROBL. 6.

A data recta linea dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere.

Sit data recta AB, ſuper quam deſcribendum ſit rectilineum rectilineo CDEFG, ſimile ſimiliterq; poſitum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad ſingulos angulos oppoſitos rectæ lineæ, quæ rectilineum reſoluant in triangula CDF, DEF, CGF. Deinde angulo DCF, æqualis ponatur angulus BAI; & angulo (a) CDF, pariter æqualis ponatur angulus a 23. pr. ABI, coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim neceſſario, quia duo anguli BAI, ABI, à quibus pro-



procedunt, ſunt duobus rectis minores, cum ſint æquales duobus angulis CDF, DCF, (b) qui duobus rectis ſũt minores) (c) eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis, totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum erit. Rurſus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus BIH: & quia duo anguli EDF, EFD, (d) minores ſunt duobus rectis, erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Vlterius angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: quia igitur duo anguli GCF, GFC, (e) minores ſunt duobus rectis, erunt, & duo anguli AIK, IAK, duobus rectis minores, quapropter rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: erit pariter triangulum AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec abſoluantur omnia triangula rectilinei propoſiti, ſi plura extiterint. Quibus ſic poſitis dico, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, ſimile eſſe, ſimiliterque poſitum. Prob. Cum enim angulus IAB, conſtitutus ſit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG, erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit, & reliqui reliquis, vt conſtat ex conſtructione; cum ſingulæ partes vnius factæ ſint æquales ſingulis partibus alterius. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero (f) ita eſt AB, ad BI, vt CD, ad DF; & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE: (g) erit ex æquo ita AB, ad BH,

b 17. pri.
c 32. pri.
d 17. pri.
e 17. pri.
f 4. ſex.
g 22. qui.

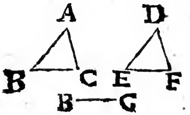
BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia ſunt, (h) quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia ſunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. (i) Rurſus ita eſt HI, ad IB, vt EF, ad FD; & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC; & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. (k) Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG, & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt; ſicque de reliquis. Quapropter rectilinea, cum ſint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, ſimilia ſunt, ſimiliterque deſcripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

h 4. ſex.
i 4. ſex.
k 22. qui.

PROPOS. 19. THEOR. 13.

Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint ſimilia triangula ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E; item C, & F, &c. Et ſit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter ſe comparata duplicatam habere rationem eius, quam habent latera homologa, ſcilicet BC, & EF; vel AB, & DE; vel AC, & DF. Hoc eſt, ſi homologis lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis BG; ita eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt eſt recta BC, ad tertiam proportionalem BG; ac proinde



inde

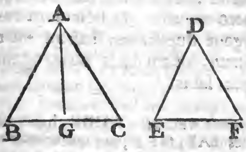
inde cum ex defin. 10. lib. 5. proportio BC, ad CG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF; proportio etiam trianguli ad triangulum erit quoque duplicata proportionis laterum homologorum BC, & EF. Ita vt nihil aliud ſit, duo triangula, vel duas quaslibet figuras ſimiles, ſimiliterque poſitas habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quam ita eſſe triangulum ad triangulum, vel figura ad figuram, vt eſt prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continue proportionales, in proportione duorum laterum homologorum: quales hic ſunt tres lineæ rectæ BC. EF, CG, continue proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde etiam tertia proportionalis CG, illis æqualis erit: ita vt proportio BC, ad CG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, ſit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, (a) quod ipſa inter ſe æqualia ſint ob angulos B, & C, angulis E, & F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adiacent; erit triangulum ad triangulum, vt recta BC, ad recta CG. Cum ergo hæc proportio BC, ad CG, dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, duplicata proportionis, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod etiam hinc conſtare poteſt: quoniam, vt dictum eſt, triangula ABC, DEF, æqualia ſunt, hoc eſt proportionem æqualitatis habent, ſicut & latera homologa BC, EF; Proportio autem æqualitatis tantummodo duplicata efficit proportionem æqualitatis. (Poſitis enim tribus magnitudinibus æqualibus dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad ſecundam, vt conſtat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, ſicuti & prima ad ſecundam) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam eius, quam

a 26. pri.

habet

habet latus BC, ad latus EF. Quod fuit propoſitum.

Sit deinde latus BC, maius latere EF; & ex BC, (a) abſcindatur BG, tertia proportionalis ipſis BC, & EF, hoc eſt ſit BC, ad EF, vti EF, ad BG, ducaturque recta AG. Quia ergo eſt vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit permutando, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: vt autem BC, ad EF, ita eſt per conſtructionem EF, ad BG. Vt ergo AB, ad DE, (b) ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos æquales B, & E, reciproca, (c) ipſa inter ſe æqualia erunt; & propterea vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, (d) ita erit idem triangulum ABC, ad triangulum ABG. Vt autem triangulum ABC, ad triangulum ABG, eiuſdem altitudinis, (e) ita eſt baſis BC, ad baſin BG. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt BC, ad BG. Atqui cum tres BC, EF, BG, ſint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, ſecundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter ſe ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 11. ſex.
b 11. quí.
c 15. ſex.
d 7. quí.
e 1. ſex.

COROLLARIVM.

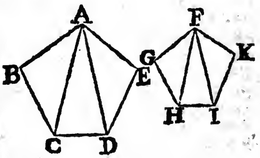
Ex hoc fit clarum, quod ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterque deſcriptum.

PRO-

PROPOS. 20. THEOR. 14.

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent inter ſe eam rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

SInt ſimilia polygona ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; nec non etiam angulos B, G, &c. habeant autem latera proportionalia circa angulos ęquales, vt quidē AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum huiuſmodi polygona diuidi in triangula ſimilia, quæ ſunt numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad ſingulos angulos oppoſitos, quæ ſunt AC, AD, FH, FI; diuiſaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis eſt angulo G, ex hypotheſi, & circa ipſos latera proportionalia; (a) æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Item angulos ACB, FHG, homologis lateribus oppoſitos: (b) ideoq; habebunt latera circa æquales angulos proportionalia: ac propterea inter ſe ſimilia erunt. Eadem prorſus ratione ſimilia erunt triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, EDA, æquales augulis KFI, KIF. Deinde



a 6. ſex.

b 4. ſex.

de (c) quia eſt vt AC, ad CB, ita FH. ad HG, ob ſimilitudinem triangulorum ABC, FGH, vt autem CB, ad CD, ita eſt ex hypotheſi HG, ad HI, ob ſimilitudinem polygonorum: (d) erit ex equo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; eſt autem; & ablatus ACB, oſtenſus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. (e) Quare triangula ACD, FHI, cum habeant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt; ideoq; ſimilia: Quæ ratio eadem eſt de alijs triangulis, ſi plura fuerint. c 4. ſex. d 22. qui. e 6. ſex.

Dico vlterius, hæc triangula eſſe homologa totis polygonis, hoc eſt ita eſſe quodlibet triangulum in vno polygono ad ſuum correſpondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim ſimilia ſunt triangula ABC, FGH, (f) erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI; cum vtraque hæc triangulorum proportio ſit duplicata eiuſdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque diſſimili ratione concludetur quoque eſſe triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, ſi plura extiterint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius ſint antecedentia, & alterius conſequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens, ad vnum conſequens, (g) ita ſunt omnia antecedentia, ad omnia conſequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad ſibi reſpondens triangulum in altero polygono, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis. f 19. ſex. g 12. qui.

Demum dico, polygona inter ſe proportionem ha-

bere duplicatam eius quam habent latera homologa; hoc eſt, ſi homologis lateribus, verbi gratia AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt eſt prima linea AB, ad tertiam inuentam: ac proinde, cum proportio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG: dicetur quoque proportio polygoni ad polygonum duplicata proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim ſit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum vero ABC, ad

h19.ſex. triangulum FGH, (h) proportionem habeat duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc eſt eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter ſe proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc eſt, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentam. Quare ſimilia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

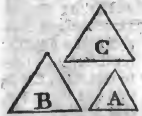
Hinc fit manifeſtum, quod ſi fuerint tres lineæ rectæ proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe polygonum ſuper primam deſcriptum ad polygonum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterque deſcriptum; vel ita eſſe polygonum ſuper ſecundam deſcriptum ad polygonum ſuper tertiam ſimile, ſimiliterque deſcriptum.

PRO-

PROPOS. 21. THEOR. 15.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia; & inter ſe ſunt ſimilia.

Sint rectilinea A, & B, rectilineo C, ſimilia. Dico & ipſa inter ſe eſſe ſimilia. Prob. Cum enim propter ſimilitudinem anguli rectilinei A, æquales ſint angulis rectilinei C; item eadem de cauſa anguli rectilinei B æquales angulis eiuſdem rectilinei C; (a) erunt anguli rectilinei A, æquales angulis rectilinei B. a 1. pri. Rurſus cum ob eandem ſimilitudinem latera rectilinei A, proportionalia ſint lateribus rectilinei C; ea videlicet iis, quæ ſunt circa æquales angulos: Nec non etiam eandem ob cauſam, latera rectilinei B, proportionalia ſunt lateribus eiuſdem rectilinei C; (b) erunt quoque latera rectilinei b 11. qui. A, lateribus rectilinei B, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. Quare ſecundum definitionem ſimilia exiſtent rectilinea A, & B. Quæ igitur eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. Quod erat oſtendendum.

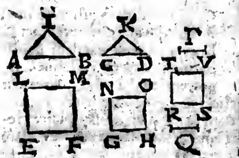


Digitized by Google

PROPOS. 22. THEOR. 16.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ab eis rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia, ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt in primis quatuor rectæ AB, CD, EF, GH; proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; conſtruanturque ſuper AB, CD, duo quæcunque rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta AIB, CKD; itemque ſuper EF, GH, alia duo quæcunque rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta E F M L, G H O N. Dico etiam hæc rectilinea proportionalia



eſſe; vt quidem AIB, ad CKD, ita EFML, ad GHON.

a 11. ſex. (a) Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, pariter inueniatur tertia

b 22. qui. proportionalis Q. (b) Eritque ex æquo vt AB, ad P, ita EF, ad Q; Vt autem AB, ad P, ita eſt rectilineum AIB, ad rectilineum CKD, ſimile ſimiliterque deſcriptum ex corollario 20. propoſ. huius libri; & ſi fuerint triangula ex coroll. propoſ. 19. huius. Et eadem ratione, vt E F, ad Q, ita rectilineum EM, ad

c 11. qui. rectilineum GO. (c) Igitur vt AIB, ad CKD, ita erit EM, ad GO. Quod eſt propoſitum.

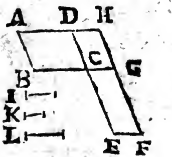
Dein-

Deinde ſint AIB, CKD, EM, GO, proportionalia rectilinea. Dico quatuor rectas AB,CD,EF,GH, eſſe quoque proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. (d) Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, ſuper quam deſcribatur rectilineum RSVT, ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineo EM; (e) ob idque rectilineo GO. Quoniam igitur eſt, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, vt iam oſtenſum fuit, vt AIB, ad CKD, ita EM, ad RV. Vt autem AIB, ad CKD, ita quoque ponitur EM, ad GO. (f) Igitur erit vt EM, ad RV, ita EM, ad GO; (g) Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum ſint ſimilia, ſimiliterque poſita, conſiſtent neceſſario, (vt mox oſtendemus) ſuper rectas RS, GA, æquales. (h) Quare erit, vt EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. (i) Quapropter erit quoque, vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

d 12. ſex.
e 21. ſex.
f 11. qui.
g 9. qui.
h 7. qui.
i 11. qui.

PROPOS. 23. THEOR. 17.

Aequiangula parallelogramma inter ſe habent eam rationem, quæ ex lateribus componitur.



SInt æquiangula parallelogramma AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, inter ſe æquales. Dico proportionem eorum eſſe compoſitam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt anteceden-

tia proportionum ſint in vno parallelogrammo; & conſequentia in altero; hoc eſt, proportionem parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, compoſitam eſſe ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CG, & rectæ DC, ad rectam CE; vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Ideſt, ſi ſumantur tres lineæ, quarum prima ſtet ad ſecundam, ſicuti latus BC, ſtat ad latus CG; & rurſus ſecunda ſtet ad tertiam, vt latus DC, ſtat ad latus CE; ita eſſe parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt eſt prima linea ad tertiam: ac proinde cum ex defin. 5. huius libri proportio primæ lineæ ad tertiam componi dicatur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compoſitam eſſe ex eiſdem proportionibus, hoc eſt ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectam: Quo poſito cum anguli BCD,
a 15. pri. ECG, ſint æquales, (a) erunt etiam DC, CE, vna linea recta. Producantur deinde AD, FG, donec concurrant in puncto H; ſumptaque recta I, quacunque,
b 12. ſex. (b) inueniatur tribus BC, CD, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta propor-
c 1. ſex. tionalis L. Quoniam igitur eſt, (c) vt BC, ad CG, ita AC, ad CH. Vt autem BC, ad CG, ita poſita eſt I, ad
d 11. qui. K, (d) erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque prorſus argumento oſtendi poterit eſſe, vt AC, ad
e 1. ſex. CF, ita K, ad L: nam vt DC, ad CE, (e) ita eſt AC, ad CF. Cum ergo poſita ſit K, ad L, vt DC, ad CE;
f 22. qui. erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L: (f) ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L; ſed proportio I, ad L, iuxta 5. defin. huius libri componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eiſdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF. Eademque ratione oſtendemus, proportionem AC, ad

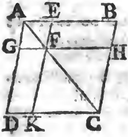
CF,

CF, componi ex proportionibus BC, ad CE; & DC, ad CG, dummodo tamen parallelogramma ita coniungantur ad angulos rectos, vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectam, &c. Aequiangula ergo parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. 24. THEOR. 18.

In omni parallelagrammo, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

Sit parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & quodlibet eius punctum F, per quod ducantur duæ rectæ EK, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma GE, KH, circa diametrum, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo, & inter ſe. Quod enim æquiangula ſint toti parallelogrammo ABCD, facile oſtendetur. Nam angulus GAE, idem eſt, qui angulus DAB; (a) & angulus externus AEF, æqualis eſt interno ABC; & angulus AGF, externus interno ADC; & angulus EFG, externus interno FKD; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum eſt EG, parallelogrammum parallelogrammo BD; & eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit HK. Quod poſtea latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, taliter demonſtratur. Cum triangulum AGF, æquiangulum ſit triangulo ABC, & triangulum AEF, triangulo ABC, vt clare conſtat ex 29. Propoſ. libri primi, vel etiam ex Coroll. Propoſ. 4. huius libri; (b) erit vt



a 29. pri.

b 4. ſex.

AD, ad DC, ita AG, ad GF, atque ita latera circa æquales angulos D, & G, proportionalia ſunt. Rurſuſque erit, (c) vt DC, ad CA, ita GF, ad FA; Item vt CA, ad CD, ita FA, ad FE: Ex æquo igitur, vt DC, ad CB, ita eſt GF, ad FE, ac propterea etiam latera circa æquales angulos DCB, GFE, proportionalia exiſtunt. Haud aliter demonſtrabitur reliqua latera circa æquales angulos, eſſe proportionalia. Quare ſecundum definitionem figurarum ſimilium, ſimile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem prorſus arte oſtendi poterit parallelogrammum KH, ſimile eſſe eidem parallelogrammo BD,(e) atque adeo & ipſa inter ſe ſimilia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt &c. Quod erat oſtendendum.

c 4. ſex.

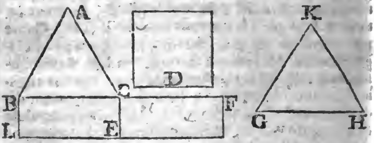
e 21. ſex.

PROPOS. 25. PROBL. 7.

Dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum, & alterni dato æquale idem conſtituere.

SInt data duo rectilinea A B C, & D; conſtituendumq; ſit aliud rectilineum, quod ſimile quidem ſit rectilineo A B C, æquale vero ipſi D. Super BC, vnum latus rectilinei, cui ſimile debet conſtitui, (a) conſtituatur parallelogrammum BE, in quouis angu-

a 44. vel 45. pri.



lo æquale rectilineo ABC: & ſuper rectam CE, in angulo

gulo ECF, qui æqualis ſit angulo CBL, parallelogrammum EF, æquale ipſi D; eritque tàm BC, quàm I E, in directum producta. Quod facile demonſtratur, nam ad rectam EC, & ad eius punctum C, ductæ ſunt duæ rectæ BC, FC, quæ faciunt duos angulos duobus rectis æquales, cum enim duo anguli ECB, LBC, (b) ſint duobus rectis æquales; & angulus FCE, poſitus ſit æqualis angulo CBL, erunt etiam duo anguli FCE, ECB, duobus rectis æquales, (c) quare in directum erunt BC, & CF; quoquomodo pariter demonſtrabitur, lineam LE, eſſe in directum productam. Quo poſito inueniatur iam (d) inter rectas BC, CF, media proportionalis GH; (e)ſuper quam conſtituatur rectilineum GHK, ſimile ipſi ABC, ſimiliterque poſitum. Dico GHK, æquale eſſe alteri rectilineo D. Probat. Cum enim proportionales ſint tres rectæ BC, GH, & CF; erit per Coroll. Propoſ. 19. vel 20. huius libri, vt BC, prima ad CF, tertiam, ita rectilineum ABC, ſuper primam BC, ad rectilineum GHK, ſuper GH, ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum: (f) Vt autem BC, ad CF, ita eſt parallelogrammum BE, ad parallelogrammum EF, eiuſdem altitudinis: (g) Igitur erit, vt BE, ad EF, ita ABC, rectilineum ad rectilineum GHK: (h) Vt autem BE, ad EF, ita eſt rectilineum ABC, ad rectilineum D: propterea quod parallelogrammum BE, rectilineo ABC; & parallelogrammum EF, rectilineo D, conſtructum eſt æquale. (i) Quare erit vt ABC, ad D, ita ABC, ad GHK; (k) propter eaque æqualia erunt rectilinea D, & GHK; eſt autem & GHK, ſimile ipſi ABC, ſimiliterque poſitum per conſtructionem. Dato igitur rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituimus. Quod erat faciendum.

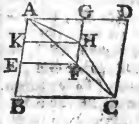
b 29. pri.
c 14. pri.
d 13. ſex.
e 18. ſex.
f 1. ſex.
g 11. qui.
h 7. qui.
i 11. qui.
k 9. qui.

PRO-

PROPOS. 26. THEOR. 19.

Si à parallelogrammo ablatum ſit parallelogrammum, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.

Ex parallelogrammo BD, abſciſſum ſit parallelogrammum EG, ſimile toti, ſimiliterque poſitum, habens cum ipſo angulum communem EAG. Dico EG, conſiſtere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ ſi fuerint vna linea recta, perſpicuum eſt, cum AF, ſit diameter ipſius EG, & AC, diameter ipſius BD, parallelogrammum EG, conſiſtere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod ſi vero AF, CF, non dicantur efficere vnam lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter AC, ſecans latus GF, in H, puncto, per quod ipſi EF, parallela ducatur KH. Quoniam igitur parallelogramma BD, KG, ſunt circa eandem diametrum AHC; (a) ipſa erunt ſimilia, ſimiliterque poſita. Quare (b) erit vt BA, ad AD, ita KA, ad AG: ſed vt BA, ad AD, ita quoque eſt EA, ad AG, quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam ſimilia, ſimiliterque poſita. (c) Igitur erit vt EA, ad AG, ita KA, ad AG; (d) ac propterea æquales erunt rectæ EA, KA, pars, & totum: quod eſt abſurdum. Quoquo modo demonſtrabitur, lineam AHC, nequaquam ſecare aliud latus EF; quare dicendum venit lineas AF, FC, conſtituere vnam lineam rectam; hoc eſt ducta diameter AC, tranſibit



a 24. ſex.
b 1. def. ſex.
c 11. qui.
d 9. qui.

per

per punctum F, & ducta diameter AB, cadit in punctum C. Ergo ſi à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 27. THEOR. 20.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus, ſimiliterque poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur; maximum illud eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.

Sit data recta AB, diuiſa bifariam in C, & ſuper eius dimidiam BC, conſtituatur quodcunque parallelogrammum BCDE, cuius diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum AE, erit parallelogrammum AD, ſuper dimidiam AC, conſiſtens, applicatum ſecundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & exiſtens ſimile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam AC, applicatum deficienſq; parallelogrammo CE, maximum



eſſe omnium, quæ ſecundum rectam AB, applicantur, deficiuntque parallelogrammis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis ipſi CE. Prob. Sumpto enim puncto F, vtcunque in diametro BD, ductiſque per F, rectis GFH, KF, quæ ſint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum GK, ſecundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo KH, (a) quod ipſi CE, ſimile eſt, ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem dia- a 24 ſex.

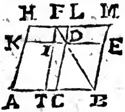
me-

b 43.pri. metrum cum CE. (b) Quoniam vero complementa CF, FE, æqualia ſunt, ſi communis addatur KH, erunt quoque æqualia CH, & KE: (c) Eſt autem CH, æquale ipſi CG, propter baſes æquales AC, CB: Quare etiam CG, & KE, æqualia erunt, additoque communi CF, æqualia erunt parallelogrammum AF, & gnomon LMN. Quare cum CE, maius ſit gnomone LMN, (continet namq; CE, præter dictum gnomonem etiam parallelogrammum DF,) eritquoque AD, (d) æquale exiſtens ipſi CE, propter baſium æqualitatem AC, CB, maius quam parallelogrammum AF, eodem parallelogrammo DF. Eodemque modo oſtendetur AD, maius eſſe omnibus parallelogrammis, quæ ita ſecundum rectam AB, applicantur, vt punctum F, ſit inter puncta B, & D, hoc eſt quæ occupant maiorem lineam ſemiſſe AC, habentque minorem altitudinem, quam AD, dummodo defectus ſimiles ſint ipſi CE.

c 36.pri.

36.pri.

Si vero illud punctum F, ſumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE; tunc ducta per F, recta HM, quæ ſit parallela ipſi AB, occurratque rectis AK, BE, productis in punctis A, & M. Item ducta FG, parallela ipſi AH; erit parallelogrammum AF, applicatum ſecundum rectam AB, deficiens parallelogrãmo GM,



e 4. ſex. (e) quod ipſi CF, ſimile eſt, ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem diametrum cum CE. Dico adhuc maius eſſe AD, ipſo AF. Probat. Protracta enim CD, ad L, æquales erunt rectæ HL, LM, (f) cum æquales ſint æqualibus AC, CB; (g) Ideoque æqualia parallelogramma HD, DM; (h) Cum igitur DM, complementum, æquale ſit complemento DG erit & HD, æquale ipſi DG. Eſt autem HD, maius quam AI, parallelogrammo FD; quare & DG, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo FD; ac propterea communi

f 34.pri.
g 36.pri.
h 43.pri.

communi

ſtituni addito AI, maius erit AD, quam AF, eodem parallelogrammo FD. Eodem prorſus modo concludes AD, maius eſſe quocunque parallelogrammo ita applicato ſecundum rectam AB, vt punctum F, ſit vltra D, in diametro BD, producta: hoc eſt quod occupat minorem lineam ſemiſſe AC, habeatque maiorem altitudinem, quam AD, dummodo defectus exiſtat ſimilis parallelogrammo CE. Quapropter omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum,&c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOS. 28. PROBL. 8.

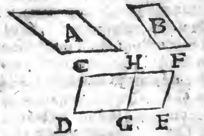
Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non eſſe maius eo, quod ad dimidiam applicatur, cum ſimiles fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur,& eius, cui ſimile deeſſe debet.

SCHOLIVM.

Antequam huius Theor. demonſtrationem proponamus, referre debemus vtiliſſimum Peletarij problema, quod tale eſt.

Datis duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minus inquirere.

Sint data rectilinea A, & B; A quidem maius, & B, minus. Oportet igitur quærere qua magnitudine

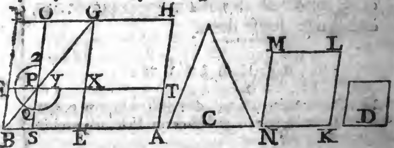


a 41.pri.

dine rectilineum A, ſuperet rectilineum B. Fiat parallelogrammum CDEF, (a) in quocunq; angulo æquale maiori rectilineo A: & ſuper rectam CD, conſtituatur parallelogrãmũ CDGH, in dato angulo D, æquale minori rectilineo B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF, ſuperat parallelogrammum CDGH, parallelogrammo EFHG, ſuperabit quoq; figura A, figuram B, eodem parallelogrammo EFHG. Quod fuit propoſitum.

His poſitis facilius proponitur demonſtratio ſuperioris propoſitionis, cum ad ipſam hoc problema neceſſario requiratur, vt in praxi apparebit.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandũ eſt parallelogrammum æquale, deficiens



parallelogrammo, quod ſit ſimile alteri dato parallelogrammo D. Secta AB, bifariam in E, ſuper medietatem EB, (a) deſcribatur parallelogrammum EGFB, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum, compleaturque totum parallelogrammum AHFB. Si ergo AG, æquale eſt ipſi C; cum ſit applicatum ad AB, deficiens parallelo-

a 18.ſex.

lelogrammo BG, ſimili ipſi D; factum erit, quod proponitur. Si vero A G, maius eſt quam C, (neque enim minus eſſe debet. Siquidem per præcedentem Propoſ. ipſum eſt omnium applicatorum maximum, dummodo defectus ſint ſimiles, vnde non poteſt vllum applicari ad AB, quod ſit ipſi C, æquale, cum omnia ſint minora. Quapropter adiunxit Euclides. *Oportet autem datum rectilineum &c.*) erit quoque ſibi æquale B G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo KLMN. (Qua vero ratione ſit inquirendus exceſſus duorum rectilineorum ſupra docuimus, vnde cernitur modo neceſſitas Probl. paulo ante propoſiti.) (b) ſimile quidem ſimiliterque poſitum ipſi D, ſeu ipſi BG; ita vt ſit BG, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, ſimul ſumptis, ob idque maius quam KM. Cum igitur ob ſimilitudinem ſit vt EG, ad GF, ita KL, ad LM, erunt quoque latera EG, GF, maiora lateribus KL, LM. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, eſſet etiam BG, æquale ipſi NL, vel minus, vt conſtat. Quare abſciſſis rectis G X, GO, quæ ſint æquales ipſis KL, LM, & completo parallelogrammo GOPX, erit hoc ipſi KM, æquale, eidemque ſimile ſimiliterque poſitum, & propterea etiam ipſi BG: (c) Atque adeo circa eandem diametrum cum BG conſiſtet, quæ diameter ſit BG. Productis iam rectis OP, XP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, (d) quod ſimile eſt ipſi EF, ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi D. Dico igitur AP, æquale eſſe ipſi rectilineo C. Prob. Nam cum PF, complementum (e) æquale ſit complemento PE, ſi addatur commune PB, erit BO, æquale ipſi BX, hoc eſt ipſi ET, quod æquale eſt ipſi BX, (f) propter baſes æquales BE, EA. Quare ſi æqualibus AX, BO, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni YQ 2: Sed gnomon YQ 2, æqualis eſt rectilineo C, (nam cum BG, parallelogrammum æquale ſit ipſi C, vna cum KM, ſi æqualia auferantur KM, & OX, remanebit gnomon YQ 2, ipſi C, æqualis.

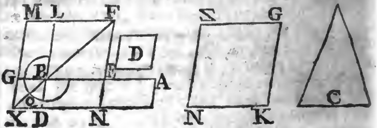
b 25. ſex.
c 26. ſex.
d 24. ſex.
e 43. pri.
f 36. pri.

lis. Quare etiam AP, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum eſt parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo BP, quod ſimile eſt dato parallelogrammo D, & æquale exiſtens dato rectilineo C. Quod faciendum erat.

PROPOS. 29. PROBL. 9.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod ſimile ſit dato alteri



a 18. ſex. parallelogrammo D. Diuiſa AB, biſariam in E; (a) ſuper dimidiam BE, conſtituatur parallelogrammum EFLB, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum. (b) Poſtb 25. ſex. modum vero rectilineo C, & parallelogrammo EL, æquale conſtituatur parallelogrammum NKGZ, ſimile vero ſimiliterque poſitum ipſi EL; quapropter erit NKGZ, maius quam EFLB, quandoquidem factum fuit æquale parallelogrammo EL, vna cum rectilineo C; Cum igitur ob ſimilitudinem inter NG, & EL, ſit vt KG, ad GZ, ita EF, ad FL, erunt quoque latera KG, GZ, lateribus EF, FL, maiora. Si enim illa his

forent

forent æqualia, vel minora, eſſet pariter NG, vel æquale ipſi EL, vel minus, vt perſpicuum eſt. Productis ergo rectis FE, FL, taliter, vt rectæ FN, FM, æquales ſint rectis GK, GZ; & completo parallelogrammo NM; erit hoc parallelogrammum ſimile ſimiliterque poſitum ipſi EL, cum ſit æquale ipſi NG, & ſimile, ſimiliterque poſitum. (c) Quare NM, & EL, circa eandem diametrum conſiſtent, quæ ſit XF. Productis iam AB, LB, ad G, & D; & XN, donec parallelogrammum compleat XA. Quibus poſitis erit parallelogrammum AX, applicatum ad rectam AB, excedens parallelogrammo DG, (d) quod ſimile eſt ipſi EL, ac proinde ipſi D. Dico igitur AX, æquale eſſe rectilineo C. Nam cum NA, NB, (e) ſint æqualia; & NB, (f) æquale complemento BM, erit & NA, ipſi BM, æquale. Communi ergo addito NG, fiet AX, æquale gnomoni EXL; ſed gnomon EXL, æqualis eſt rectilineo C. (Nam cum NG, hoc eſt NM, æquale ſit rectilineo C, vna cum EL, ſi commune auferatur EL, remanebunt æqualia gnomon EXL, & rectilineum C.) Quare etiam AX, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum eſt AX, excedens parallelogrammo DG, quod ſimile eſt alteri dato D. Quod faciendum erat.

c 26. ſex.
d 24. ſex.
e 36. pri.
f 43. pri.

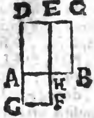
PROPOS. 30. PROBL. 10.

Propoſitam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione ſecare.

Sit recta AB, ſecanda extrema, ac media ratione. Deſcripto ſuper eam quadrato ABCD; (a) ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadra-

a 29. ſex.

to AC; extendenſque parallelogrammo AF, ſimili ipſi quadrato AC, ita vt AF, quoque ſit quadratum, cum quadrato ſolum quadratum ſit ſimile. Secet autem recta EF, rectam AB, in puncto H. Dico AB, in H, ſectam eſſe extrema, ac media ratione. Probatur. Cum enim æqualia ponantur rectangulum DF, & quadratum AC, ſi commune dematur DH, remanebunt æqualia GH, &



HC; quæ cum habeant angulos æquales AHF, EHE, vtpote rectos, (b) erunt latera circa illos reciproca,
b14.ſex. hoc eſt erit vt EH, vel AB, ipſi EH, æqualis, ad HF, hoc eſt ad AH, ipſi HF, æqualem vt AH, ad HB. Quare cum ſit vt tota AB, ad ſegmentum AH, ita idem ſegmentum AH, ad ſegmentum HB, ſecta eſt AB, extrema, ac media ratione, per defin. 3. huius libri. Propoſitam ergo rectam lineam terminatam &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

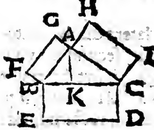
Praxis diuidendi lineam extrema, ac media ratione in 11. Propoſ. lib. 2. propoſita fuit.

PROPOS. 31. THEOR. 21.

In rectangulis triangulis figura quæuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, ęqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus, deſcribuntur.

Sit datum triangulum rectangulum ABC, habens angulum BAC, rectum; deſcribaturque ſuper BC, quæ-

quæcunque figura rectilinea BCDE, (a) cui ſimiles, ſimiliterque poſitæ conſtituantur ſuper AB, & AC, ſintque BAGF, AHIC. Dico figuram BD, æqualem eſſe duabus figuris AF, AI. Demiſſa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK, erit per Coroll. Prop. 8. huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, ſuper primam ad figuram CH, ſuper ſecundam ſimilem, ſimiliterq; poſitam per Coroll. Propoſ. 19. vel 20. huius libri: & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Haud ſecus oſtendetur, eſſe quoque vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, ſint pariter proportionales &c. Quoniam igitur eſt, vt CK, prima quantitas ad BC, ſecundam, ita CH, tertia ad BD, quartam: Itemq; vt BK, quinta quantitas ad BC, ſecundam ita BG, ſexta ad BD, quartam; erit vt prima CK, (b) cum quinta BK, ad BC, ſecundam ita tertia CH, cum ſexta BG, ad BD, quartam: ſunt autem prima CK, & quinta BK, ſimul æquales ſecundæ BC; Igitur tertia CH, & ſexta BG, ſimul æquales quoq; erunt quartæ BD; quod fuit propoſitum. In rectangulis ergo triangulis figura quæuis &c. Quod erat oſtendendum.



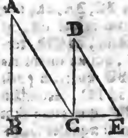
a 18. ſex.

b 24. quin.

PROPOS. 32. THEOR. 22.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

Habeant triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, hoc eſt vt AB, ad AC, ita DC, ad DE; componanturque ad angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC, item AC, DE, ſint inter ſe parallela. Dico reliqua duo latera BC, CE, rectam lineam componere. Probat. Cum enim parallelæ ſint AB, DC; (a) erit angulus A, alterno angulo ACD, æqualis; eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac proinde A, & D, inter ſe quoque exiſtent æquales.



a 29. pri.

Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; (b) ipſa erunt inter ſe æqualia, habebuntque æquales angulos B, & DCE: Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc eſt angulo ACE, æquales. Denuo addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: ſed illi tres (c) æquales ſunt duobus rectis. Ergo etiam duo ACE, ACB, duobus rectis æquales erunt: (d) Quare BC, CE, vnã rectã lineam conſtituent. Ergo ſi duo triangula, quæ duo latera duobus

b 6. ſex.

c 32. pri.

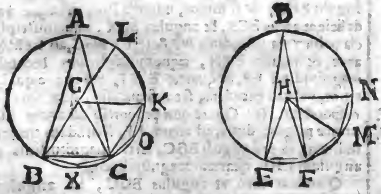
d 14. pri.

ſuis lateribus proportionalia habeant &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 33. THEOR. 23.

In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. Inſuper vero & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.

SInt duo æquales circuli ABC, DEF, quorum centra G, & H; ſumanturque ex circulis duo quicunque arcus, nempe BC, EF, quibus ad centra quidem inſiſtant anguli BGC, EHF; ad circumferentias vero an-



guli BAC, EDF. Dico eſſe iuxta defin. 6. lib. 5. vt BC, ad arcum EF, ita angulum BGC, ad angulum EHF, & angulum BAC, ad angulum EDF: & inſuper ſectorem BGC, qui rectis BG, GC, & arcu BC, continetur, ad ſectorem EHF, quem comprehendunt rectæ EH, HF, & arcus EF. Prob. Ductis enim rectis BC, EF, (a) applicentur ipſis in circulis æquales rectæ, a 1. quart.

ctæ, CK, quidem ipſi BC; at vero FM, MN, ipſi EF,
ducanturque rectæ KG, MH, NH; Quoniam igitur
b 28. ter. æquales ſunt rectæ BC, CK, (b) erunt quoque æqua-
c 27. ter. les arcus BG, CK; (c) ac propterea, & anguli BGC,
CGK, æquales erunt. Eadem prorſus ratione æquales
erunt, & arcus EF, FM, MN, & anguli EHF, FHM,
MHN; Quam multiplex ergo eſt arcus BCK, ipſius
arcus BC, tam multiplex erit angulus BGK, ſeu ag-
gregatum angulorum prope centrum G, inſiſtentium
arcui BCK, ipſius anguli BGC; Et quàm multiplex eſt
arcus EFMN, ipſius arcus EF, tàm multiplex erit an-
gulus EHN, ſeu aggregatum angulorum prope cen-
trum H, arcui EFMN, inſiſtentium, anguli EHF, ſi-
quidem in tot angulos æquales diuiſi ſunt anguli BGK,
EHN, in quot æquales arcus ſecti ſunt arcus BCK,
EFMN. Quoniam vero ſi arcus BCK; æqualis fuerit
d 27. ter. arcui EFMN, (d) neceſſario angulus BGK, angulo
EHN, æqualis erit: Ac proinde ſi arcus BCK, maior
fuerit arcu EFMN, neceſſario angulus BGK, maior eſt
angulo EHN; & ſi minor, minor: Proptereaque vna
deficient arcus BCK, & angulus BGK, æquemultipli-
cia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BGC, ab EFMN,
arcu, & angulo EHN, æquemultiplicibus ſecundæ
magnitudinis EF, & quartæ EHF; vel vna æqualia
erunt, vel vna excedent, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe
e 6. def. quinti. reſpondent. (e) Quare quæ proportio eſt arcus BC,
primæ magnitudinis, ad arcum EF, ſecundam magni-
tudinem, ea erit anguli BGC, tertiæ magnitudinis ad
angulum EHF, quartam magnitudinem.

Quoniam vero vt angulus BGC, ad angulum
f 20. ter. EHF, (f) ita eſt angulus BAC, ad angulum EDF,
g 18. ter. (g) cum illi horum ſint dupli, perſpicuum eſt ita eſſe
quoque angulum BAC, ad angulum EDF, vt eſt ar-
cus BC, ad arcum EF. Quod totum eiſdem argumen-
tis demonſtrari poteſt, quibus vſi ſumus in angulis ad
centra conſtitutis, &c.

Conſtituantur iam in ſegmentis BC, CK, anguli
h 27. ter. BXC, CQK, (h) qui æquales erunt, cum inſiſtant
æqua-

æqualibus arcubus BAC, CBAK; Quare ſimilia erunt ſegmenta BXC, COK: (i) atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod ſunt ſuper rectas BC, CK, æquales. Additis igitur triangulis BGC, CGK, (k) quæ æqualia quoque ſunt, fient ſectores BGC, EHF, æquales. Quamobrem tam multiplex erit ſector BGK, ſectoris BGC, quam multiplex eſt arcus BCk, arcus BC. Pari modo oſtendemus, ſectorem EHN, tam multiplicem eſſe ſectoris EHF, quam multiplex eſt arcus EFMN, ipſius arcus EF. Quoniam vero ſi arcus BCk, æqualis fuerit arcui EFMN, ſector quoque BGK, ſectori EHN, æqualis erit; & ſi maior, maior; & ſi minor, minor erit. Deficient propterea vna arcus BCk, & ſector BGk, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BGC, ab arcu EFMN, & ſectore EHN, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis EF, & quartæ EHF; vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, ſi ea, quæ inter ſe reſpondent, ſumantur. Quare (l) quæ proportio eſt arcus BC, primæ magnitudinis ad arcum EF, ſecundam magnitudinem, ea erit ſectoris BGC, tertiæ magnitudinis ad ſectorem EHF, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis anguli eandem habent rationem cum periferijs &c. Quod erat demonſtrandum.

i 24. ter.
k 4. pri.
l 6. def. quin.

COROLLARIVM. 1.

Ex iam demonſtratis fit manifeſtum, ſic eſſe ſectorem, vt eſt angulus ad angulum. Nam vtraque proportio eadem eſt proportioni arcus ad arcum. (a) Quare & inter ſe eædem erunt.

a 11. qui.

COROLLARIVM 2.

Rurſus perſpicuum eſt, vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ita eſſe arcum ſubtenſum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, vt ſunt quatuor recti ad angulum in centro, ita eſſe totam circumferen-

rentiam ad arcum illi angulo ſubtenſum. Siquidem vt eſt angulus in centro ad angulum rectum in cen-
b33. ſex. tro, (b) ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad quadrantem angulo recto ſubtenſum. Quapropter erit, vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad 4. rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad quadruplum quadrantis nimirum ad totam circumferentiam. Quod eſt primum. Quoniam vero eſt vt angulus in centro ad 4. rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circumferentiam; erit conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro ſubtenſum. Quod eſt ſecundum.

Elementi Sexti Finis.

V. D. Fulgentius Orighettus Pœniten. Rector. &c.

Imprimatur.

Fr. Paulus Hieronymus Giacconus Inquiſit. Bononiæ.

A01 1461989

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

B. 144.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

XXXII
B 14

Digitized by Go